

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

MARISSA TEIXEIRA DA SILVA

**UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL PARA
DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS CRÍTICOS DE FLAMBAGEM DE PERFIS DE
INÉRCIA VARIÁVEL**

VITÓRIA

2025

MARISSA TEIXEIRA DA SILVA

**UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL PARA
DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS CRÍTICOS DE FLAMBAGEM DE PERFIS DE
INÉRCIA VARIÁVEL**

Projeto de Graduação apresentado ao
Departamento de Engenharia Civil do
Centro Tecnológico da Universidade
Federal do Espírito Santo, como requisito
parcial para obtenção do grau de Bacharel
em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. João Victor Fragoso
Dias

VITÓRIA

2025

MARISSA TEIXEIRA DA SILVA

**UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL PARA
DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS CRÍTICOS DE FLAMBAGEM DE PERFIS DE
INÉRCIA VARIÁVEL**

Projeto de Graduação apresentado ao
Departamento de Engenharia Civil do
Centro Tecnológico da Universidade
Federal do Espírito Santo, como requisito
parcial para obtenção do grau de Bacharel
em Engenharia Civil.

Aprovado em 11 de março de 2025.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. João Victor Fragoso Dias

Orientador

Prof.ª Dr.ª Adenilcia Fernanda Grobério

Calenzani

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof.ª Dr.ª Juliana da Cruz Vianna Pires

Universidade Federal do Espírito Santo

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente.

Aos meus pais, Anastece e Jair, pelo amor, cuidado e por me incentivarem a estudar, nunca medindo esforços para a minha educação.

Às minhas irmãs, Michelle e Mayara, por serem referências em minha vida. Obrigada por me ouvirem quando preciso e por sempre saberem o que dizer.

Ao meu estimado professor e orientador, João Victor Dias, por todo o apoio, incentivo, conselhos, paciência e sabedoria. É um privilégio aprender com alguém tão atencioso e excelente no que faz.

Ao meu namorado, Antonio, por acreditar em mim e estar presente nos momentos difíceis. Seu acolhimento é meu porto seguro.

Aos meus amigos e colegas com quem tive a honra de dividir esta incrível jornada de graduação na Ufes, em especial à Lara Moura, Arthur Porto, Caio Benetti e Vinícius Magalhães.

Às minhas amizades do Ifes, por estarem há 10 anos compartilhando comigo, diariamente, as alegrias e tristezas da vida. Não há distância que diminua ou me faça esquecer o carinho e o suporte de vocês.

Às professoras Fernanda Calenzani e Juliana Vianna, por todos os ensinamentos em suas disciplinas e por se disporem a participar da avaliação deste trabalho.

A todos os professores que passaram pela minha vida, dentro e fora da Ufes, e que contribuíram, de alguma forma, para a pessoa e profissional que sou hoje.

RESUMO

Os perfis de aço inércia variável apresentam-se como uma solução estrutural que permite a otimização de geometria do perfil e economia de material, visto que podem possuir uma seção transversal de maior altura em regiões de maior momento fletor. De uma maneira geral, as normas brasileira (ABNT, NBR 8800:2024), americana (ANSI/AISC 360-22) e europeia (EN 1993-1-1:2005) não trazem uma formulação específica para o cálculo da força ou momento crítico de perfis de inércia variável, o que desencoraja o seu uso. A determinação do momento crítico desses perfis é um tema complexo, tendo em vista que a geometria não prismática das barras conduz a dificuldades em sua análise de estabilidade. Nesse contexto, o *machine learning* se mostra como uma alternativa para a determinação de momentos críticos de perfis de inércia variável. O presente trabalho propôs um modelo de regressão para a obtenção do momento crítico de perfis de inércia variável através de algoritmos de inteligência artificial, mais especificamente com redes neurais. Para tal, foi gerado um banco de dados de 15000 valores de momento crítico para diferentes geometrias de perfis, a partir de análises numéricas no software de elementos finitos Ansys. Esses dados foram então utilizados para treinar um conjunto de redes neurais artificiais, avaliando-se o desempenho dos modelos de regressão com diferentes arquiteturas e variáveis de entrada e de saída. Em paralelo, foi desenvolvido um modelo de classificação *K-nearest neighbors* (KNN) desses dados de acordo com seu modo de flambagem. Os códigos dos modelos foram desenvolvidos a partir da API Keras, utilizando linguagem Python. Avaliou-se, então, o desempenho de regressões treinadas com cada classe especificada, bem como a influência da classificação dos perfis no desempenho das redes neurais. Por fim, as previsões do modelo foram comparadas com os resultados obtidos com uma formulação da literatura. Observou-se uma melhoria significativa nas previsões com a utilização do modelo de regressão em comparação à formulação.

Palavras-chave: Perfis de inércia variável; momento crítico; *machine learning*; redes neurais; KNN.

ABSTRACT

Web-tapered members are presented as a structural solution that allows the optimization of profile geometry and material savings, as they can have a deeper cross-section in zones with greater bending moments. In general, the Brazilian (ABNT, NBR 8800:2024), American (ANSI/AISC 360-22), and European (Eurocode 3, EN 1993-1-1:2005) standards do not provide a specific formulation for calculating the critical force or critical bending moment of web-tapered members, discouraging their use. Determining the critical bending moment of web-tapered members is a complex task since the non-prismatic geometry of the members leads to difficulties in their stability analysis. In this context, machine learning is an alternative for determining critical moments of web-tapered members. A regression model was proposed to obtain the critical bending moment of web-tapered members through artificial intelligence algorithms, specifically neural networks. To this end, a database of 15000 critical bending moment values for different profile geometries was generated through numerical analyses using the Ansys finite element software. These data were then used to train a set of artificial neural networks, evaluating the performance of regression models with different architectures and input and output variables. In parallel, a K-nearest neighbors (KNN) buckling mode classifier was developed, separating data based on its buckling behavior. The model codes were developed in Python using the Keras API. The performance of regressions trained with each specified class was then evaluated, and the influence of the classification of the profiles on the performance of the neural networks was assessed. Finally, the model predictions were compared with the results obtained with a formulation in the literature. A significant improvement in prediction accuracy was observed using the regression model compared to the formulation.

Keywords: Web-tapered members; critical bending moment; machine learning; neural networks; KNN.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Galpão de aeronaves construído com perfis de inércia variável pela R & M Steel Company.....	20
Figura 2 - Configurações de equilíbrio	25
Figura 3 - Transição da Coluna de Euler entre dois estados de equilíbrio	27
Figura 4 - Comportamento de um pilar comprimido excentricamente	28
Figura 5 - Coluna de inércia variável.....	39
Figura 6 - Coluna prismática equivalente com comprimento igual a gl	41
Figura 7 - Perfil prismático equivalente para perfis de inércia variável submetidos a momento fletor	42
Figura 8 - Exemplo de algoritmo KNN com duas classes e duas características.....	51
Figura 9 - Modelo não-linear de um neurônio.....	52
Figura 10 - Função ReLU	53
Figura 11 - Função sigmoide	54
Figura 12 - Função tangente hiperbólica	54
Figura 13 - Multi-Layer Perceptron.....	57
Figura 14 - Geometria típica do modelo	60
Figura 15 - Geometria do elemento SHELL181	61
Figura 16 - Geometria do MPC184 Rigid Link/Beam	61
Figura 17 - Modelo construído.....	62
Figura 18 - Condições de contorno e carregamento do modelo estudado	63
Figura 19 - Modo de flambagem típico para perfis sujeitos à FLT	65
Figura 20 - Fluxo de dados nos modelos de classificação e regressão	72
Figura 21 - Fluxo de dados do modelo de regressão associado ao de classificação	73
Figura 22 - Gráfico de dispersão 3D com classes previstas	76
Figura 23 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para as 4 Versões da Rede	77
Figura 24 - Dispersão entre Valores Reais e Preditos para as 4 Versões da Rede ..	79
Figura 25 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para a 3 ^a Versão da Arquitetura: Previsão do Momento Crítico x Tensão Crítica	80
Figura 26 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para a 4 ^a Versão da Arquitetura: Previsão do Momento Crítico x Tensão Crítica	81

Figura 27 - Histograma de Erros Relativos Acumulados: Regressão original x Regressão com classificação	83
Figura 28 - Dispersão entre Valores Reais e Preditos: Regressão Original x Regressão com Classificação	84
Figura 29 - Histograma de Erros Relativos Acumulados: Modelo Proposto x Braham e Hanikenne (1993).....	85
Figura 30 - Comparação entre os resultados do modelo de regressão proposto e a formulação de Braham e Hanikenne (1993).....	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores tabelados para m	40
Tabela 2 - Seções transversais analisadas por Lee et al. (1972)	42
Tabela 3 - Valores tabelados para o coeficiente C de Yossif	44
Tabela 4 - Parâmetros geométricos para a modelagem dos perfis	60
Tabela 5 - Resultados da seção compacta sob compressão axial para a validação do modelo	64
Tabela 6 - Resultados da variação do comprimento total de uma amostra para a validação do modelo	64
Tabela 7 - Resultados da variação da razão de afilamento de um perfil para a validação do modelo.....	65
Tabela 8 - Hiperparâmetros avaliados no GridSearch.....	68
Tabela 9 - Desempenho Médio das Redes Neurais por Função de Ativação e Número de Camadas	69
Tabela 10 - Resultado do GridSearchCV	69
Tabela 11 - Resumo das Variáveis Preditivas Analisadas	71
Tabela 12 - Variáveis preditivas de cada versão da arquitetura 83/83/83/1	71
Tabela 13 - Desempenho dos modelos de classificação com KNN.....	74
Tabela 14 - Desempenho médio dos modelos de classificação por número de vizinhos	74
Tabela 15 - Comparativo entre diferentes funções de peso para o classificador com $k = 4$	75
Tabela 16 - Desempenho das 4 versões da arquitetura 83/83/83/1	76
Tabela 17 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para as 4 versões da arquitetura 83/83/83/1	77
Tabela 18 - Desempenho da 3 ^a e 4 ^a Versões da Arquitetura 83/83/83/1 - Previsão da Tensão Crítica x Momento Crítico	80
Tabela 19 - Desempenho dos modelos de regressão de referência e aplicados a cada classe	82
Tabela 20 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para a regressão convencional e classificada	82

Tabela 21 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para o modelo proposto e a formulação de Braham e Hanikenne (1993)	85
Tabela 22 - Exemplos de aplicação do modelo recomendado	87

LISTA DE SIGLAS

FLA	Flambagem local da alma
FLM	Flambagem local de mesa
FLT	Flambagem lateral com torção
IA	Inteligência artificial
KNN	<i>K-nearest neighbors</i>
LTU	Unidade lógica de limiar, do inglês <i>linear threshold unit</i>
MAE	Erro Médio Absoluto, do inglês <i>Mean Absolut Error</i>
MAPE	Erro Percentual Absoluto Médio, do inglês <i>Mean Absolute Percentage Error</i>
MEF	Método dos elementos finitos
MLP	<i>Multi-Layer Perceptron</i>
MSE	Erro Quadrático Médio, do inglês <i>Mean Squared Error</i>
ReLU	Unidade linear retificada, do inglês <i>Rectified Linear Unit</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas

A	Área da seção transversal
A_f	Área da mesa comprimida
C	Coeficiente para o cálculo da força crítica
C_b	Fator de modificação para diagrama de momento fletor não uniforme
C_{bm}	Fator de modificação que leva em conta a distribuição do momento na viga, segundo Trahair (2014)
C_{bt}	Fator de modificação que leva em conta a razão de afilamento na viga, segundo Trahair (2014)
C_w	Constante de empenamento da seção transversal
$C_{wL/2}$	Constante de empenamento da seção transversal na metade do segmento de comprimento L
E	Módulo de elasticidade do aço
F_1	Pontuação F_1 para modelos de classificação
F_L	Tensão de flexão presumida na fibra extrema na transição entre as regiões elástica e inelástica, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
F_{eLTB}	Tensão crítica de flambagem lateral com torção, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
FN	Número de falsos negativos
FP	Número de falsos positivos
G	Módulo de elasticidade transversal do aço
$G_{L/2}$	Módulo de elasticidade transversal do material na metade do segmento de comprimento L
I	Momento de inércia da coluna de Euler
I_1	Momento de inércia no topo da coluna de Timoshenko e Gere (1961)
I_2	Momento de inércia na base da coluna de Timoshenko e Gere (1961)
I_x	Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo x
I_{eq}	Momento de inércia equivalente para a formulação de Hirt e Crisinel (2001 <i>apud</i> Tankova <i>et al.</i> , 2018b)

$I_{x,min}$	Momento de inércia da menor seção transversal em relação ao eixo x
$I_{y,max}$	Momento de inércia da seção transversal de maior altura em relação ao eixo y
$I_{y,min}$	Momento de inércia da seção transversal de menor altura em relação ao eixo y
I_y	Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y
$I_{yL/2}$	Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y na metade do segmento de comprimento L
I_{yc}	Momento de inércia em relação a y da mesa comprimida
I_{zf}	Inércia transversal da mesa comprimida da viga
J	Constante de torção da seção transversal
J_0	Constante de torção da menor seção transversal
K_y	Coeficiente de flambagem por flexão em relação ao eixo y
K_z	Coeficiente de flambagem por torção
L	Comprimento do perfil
L_b	Distância entre duas seções contidas à flambagem lateral com torção (comprimento destravado)
L_{LT}	Comprimento de flambagem lateral
L_x	Comprimento destravado à flexão em relação ao eixo x
L_y	Comprimento destravado à flexão em relação ao eixo y
M_A	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a um quarto do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda
M_B	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção central do comprimento destravado
M_C	Valor do momento fletor solicitante de cálculo, em módulo, na seção situada a três quartos do comprimento destravado, medido a partir da extremidade esquerda
$M_{cr,Braham}$	Momento crítico de flambagem lateral com torção, segundo Braham e Hanikenne (1993)
M_{max}	Valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo, em módulo, no comprimento destravado

M_n	Momento nominal de resistência à flambagem lateral com torção elástica, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
M_r	Momento requerido de resistência à flexão, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
N_{ex}	Força crítica para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia x da seção transversal
N_{ey}	Força crítica para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia y da seção transversal
N_{ez}	Força crítica para flambagem por torção em relação ao eixo longitudinal z
P_E	Carga crítica de Euler
P_{eL}	Força crítica de Euler do perfil, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
P_r	Força axial requerida para o perfil, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
R_m	Parâmetro de monossimetria da seção transversal
R_{pg}	Fator de redução da resistência à flexão para seções transversais com almas esbeltas, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
TP	Número de verdadeiros positivos
W	Módulo de resistência (mínimo) elástico da seção, relativo ao eixo de flexão
W_{x_0}	Módulo de resistência elástico da menor seção transversal, relativo ao eixo x
W_{xc}	Módulo de resistência elástico referido à mesa comprimida

Letras romanas minúsculas

a	Distância livre entre enrijecedores transversais
a_w	Razão entre duas vezes a área da alma em compressão devido apenas à flexão no eixo de maior inércia e a área da aba comprimida, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
b_f	Largura das mesas
b_{fc}	Largura da mesa comprimida
b_{ft}	Largura da mesa tracionada
b_k	<i>Bias</i>

d	Altura total da seção transversal
d_0	Menor altura da seção transversal, segundo Lee <i>et al.</i> (1972)
d_1	Maior altura da seção transversal
d_2	Menor altura da seção transversal
d_{eq}	Fator crítico elástico, segundo Braham e Hanikenne (1993)
d_l	Maior altura da seção transversal, segundo Lee <i>et al.</i> (1972)
e	Excentricidade do carregamento axial
f_0	Tensão de flexão na mesa considerada na extremidade oposta à de f_2 no comprimento destravado, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
f_1	Tensão calculada a partir de f_0 e f_2 , segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
f_2	Valor absoluto da maior tensão de compressão na flexão em qualquer extremidade do comprimento não apoiado da alma em consideração, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
f_y	Resistência ao escoamento do aço
f_{mid}	Tensão de flexão na mesa considerada no meio do comprimento destravado, sendo considerada positiva para compressão e negativa para tração, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
f_r	Tensão requerida generalizada, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
h	Altura da alma
h_o	Distância entre os centroides das mesas
h_s	Fator de modificação para flambagem lateral com torção de vigas compactas
h_w	Fator de modificação para flambagem lateral com torção de vigas esbeltas
k	Fator de comprimento efetivo, segundo Trahair (2014)
k_n	Coeficientes de multiplicação dos parâmetros dos modelos numéricos
m	Razão adotada na formulação de Timoshenko e Gere (1961)
q	Deslocamento transversal a meia altura da coluna de Euler
r_{T_0}	Raio de giração de uma seção que compreende a mesa de compressão mais um terço da área da alma em compressão, calculado em relação a um eixo no plano da alma

r_0	Raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento
r_1	Esbelta da mesa
r_2	Esbelta da alma
r_t	Raio de giração da mesa comprimida mais um terço da área da alma em compressão devido à aplicação exclusiva do momento fletor em torno do eixo principal, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
s	Desvio padrão do conjunto de dados de treino
t_f	Espessura das mesas
t_{fc}	Espessura da mesa comprimida
t_{ft}	Espessura da mesa tracionada
t_w	Espessura da alma
u	Média do conjunto de dados de treino
u_k	Saída do combinador linear
w	Peso associado a uma variável
w_{kj}	Peso sináptico
x_{std}	Valor normalizado da variável de entrada
x_j	Sinal de entrada
x_{max}	Valor máximo da variável de entrada
x_{min}	Valor mínimo da variável de entrada
x_o	Coordenada x do centro de cisalhamento em relação ao centroide
y_o	Coordenada y do centro de cisalhamento em relação ao centroide
z	Distância da seção em relação à menor extremidade, segundo Lee <i>et al.</i> (1972)
z_{escore}	Escore padrão

Letras gregas

$\alpha_{cr,op}$	Amplificador mínimo do EN 1993-1-1:2005, aplicado às cargas de projeto no plano, necessário para alcançar a carga crítica elástica do componente estrutural em relação à flambagem lateral ou lateral com torção, sem considerar a flambagem por flexão no plano.
------------------	---

$\alpha_{ult,k}$	Amplificador de carga mínimo do EN 1993-1-1:2005, aplicado às cargas de projeto, necessário para alcançar a resistência característica da seção transversal mais crítica do componente estrutural.
γ_M	Coeficiente de ponderação de resistência do EN 1993-1-1:2005
γ_I	Razão de afilamento de acordo a inércia, segundo Marques <i>et al.</i> (2014)
γ_{eL}	Razão entre a força (ou tensão) axial crítica elástica de flambagem e a força (ou tensão) axial necessária de um elemento, com base em condições idealizadas de extremidades articuladas ($K = 1$), avaliada no plano de flexão, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
γ_{eLTB}	Razão entre o momento ou tensão crítica elástica de flambagem lateral com torção e o momento ou tensão requerida de um elemento, segundo Kaehler <i>et al.</i> (2011)
λ	Parâmetro de esbeltez
λ_p	Parâmetro-limite de esbeltez para seções compactas
λ_r	Parâmetro-limite de esbeltez para seções semicompactas
λ_{FLT}	Eobeltez para verificação à flambagem lateral com torção
$\bar{\lambda}_{op}$	Parâmetro de esbeltez global da norma europeia do EN 1993-1-2:2005
σ_r	Tensão residual de compressão nas mesas
$(\sigma_{cr})_\gamma$	Tensão crítica de flambagem de Lee <i>et al.</i> (1972) de um perfil de inércia variável
χ	Fator de redução para flambagem lateral do EN 1993-1-1:2005
χ_{LT}	Fator de redução para flambagem lateral com torção do EN 1993-1-1:2005
χ_{op}	Fator de redução aplicado à esbeltez $\bar{\lambda}_{op}$ do EN 1993-1-1:2005
γ	Razão de afilamento, segundo Lee <i>et al.</i> (1972)
δF	Força elementar que perturba a coluna de Euler
$\varphi(\cdot)$	Função de ativação
δ	Deslocamento horizontal do pilar

SUMÁRIO

1	Introdução.....	19
1.1	Considerações Iniciais.....	19
1.2	Objetivos.....	22
1.2.1	Objetivo Geral	22
1.2.2	Objetivos Específicos.....	23
1.3	Justificativa	23
2	Revisão de Literatura.....	25
2.1	Conceitos Fundamentais	25
2.1.1	Estabilidade do equilíbrio	25
2.1.2	A Coluna de Euler	26
2.1.3	Análises Lineares e Não Lineares	27
2.2	Especificações Normativas.....	29
2.2.1	Norma Brasileira	29
2.2.2	Norma Europeia.....	32
2.2.3	AISC Design Guide 25	34
2.2.4	Outras Formulações.....	39
3	Machine Learning.....	48
3.1	Aprendizado Supervisionado e Não Supervisionado.....	48
3.2	Escalonamento dos Dados	48
3.3	Classificação	49
3.4	Regressão	51
3.4.1	Neurônios e funções de ativação	52
3.4.2	Arquiteturas de rede.....	56
3.4.3	Otimizadores e taxa de aprendizado.....	57
3.4.4	Regressão com MLP's	58
3.4.5	Ajuste de hiperparâmetros	58
4	Metodologia	59
4.1	Desenvolvimento dos Modelos Numéricos	59
4.1.1	Validação	63
4.2	Definição dos Modelos de Classificação KNN.....	66
4.3	Definição da Rede Neural.....	67

4.3.1	Variáveis preditivas	70
5	Resultados e Discussão	72
5.1	Desempenho dos Modelos de Classificação	73
5.2	Desempenho das Redes Neurais	76
5.3	Efeito da Classificação dos Dados nos Modelos de Regressão	81
5.4	Comparação dos Modelos com Formulações da Literatura	84
5.5	Exemplos de Aplicação	86
6	Conclusões	88
	Referências	90

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O aço possui diversas vantagens como material estrutural: elevada resistência e ductilidade; alto grau de confiança, com características mecânicas bem definidas; facilidade de reforço e ampliação, possibilidade de reciclagem e reaproveitamento; e rapidez de execução. Os elementos estruturais de aço são empregados frequentemente na composição de treliças e como barras de pórticos, sendo adequados em construções onde há a necessidade de vencer grandes vãos ou grandes alturas, como ginásios de esportes, estádios, galpões e edifícios de grande porte (Fakury, Silva e Caldas, 2016).

Dentre as soluções estruturais em aço, a maioria das estruturas emprega perfis prismáticos, nos quais uma seção transversal constante é utilizada em todo o comprimento da barra. Uma alternativa é o uso de perfis de aço de inércia variável (Figura 1), que apresentam variação da seção transversal ao longo de seu comprimento e são geralmente aplicados em elementos que estão sujeitos, de forma dominante, à flexão (Ziemian, 2010). De acordo com Kaehler *et al.* (2011), os perfis de inércia variável proporcionam resistência e rigidez máximas com peso mínimo, resultando na otimização da geometria do perfil. São utilizadas seções de maior profundidade em regiões de elevado momento fletor e seções com almas mais espessas em regiões de elevada força cortante, o que leva a uma economia de material em comparação a perfis prismáticos.

Figura 1 - Galpão de aeronaves construído com perfis de inércia variável pela R & M Steel Company



Fonte: Aucamp (2017).

Ademais, a fabricação de uma ampla variedade de perfis de inércia variável a partir de um estoque mínimo de diferentes placas e bobinas é uma alternativa que pode ser mais econômica, em tempo e custos, em relação a encomendar ou estocar uma série de perfis laminados. A utilização de perfis de inércia variável, portanto, possibilita maior flexibilidade de fabricação (Kaehler *et al.*, 2011).

A ABNT NBR 8800:2024 estabelece requisitos para a utilização de barras de seção variável, sendo conservadora no cálculo dos esforços resistentes de cálculo. Para a determinação da força axial de compressão resistente, devem ser utilizadas as dimensões e as propriedades geométricas de seção de menor altura. O momento fletor resistente de cálculo não pode ser inferior ao solicitante de cálculo da seção onde ocorre a maior tensão de compressão nas mesas para o estado-limite último de flambagem lateral com torção. As propriedades geométricas da seção de maior altura são utilizadas para a determinação dos parâmetros de esbeltez.

Tais requisitos subestimam a capacidade resistente do perfil, uma vez que tomam como referência as seções com as piores características para cada parâmetro de verificação no dimensionamento das estruturas. Desconsidera-se, portanto, a influência das seções de maiores inércias e menores esbeltezes ao longo do comprimento da barra no comportamento dos elementos estruturais.

A norma europeia (Eurocode 3, EN 1993-1-1:2005) apresenta um método geral e um tipo de análise de segunda ordem que podem ser aplicados para perfis de inércia

variável, mas nunca estabelece formulações para os esforços críticos de flambagem. A norma americana (ANSI/AISC 360-22) não prevê um cálculo específico para a análise e dimensionamento de perfis de inércia variável. No entanto, cita o AISC *Design Guide 25* (Kaehler *et al.*, 2011) como referência para a abordagem de resistência à flexão e análise de segunda ordem de perfis de inércia variável.

Existe uma questão complexa no que diz respeito a calcular as cargas críticas de perfis de inércia variável por conta da geometria não prismática. Conforme explica Ziemian (2010), a variação das rigidezes axial, à flexão e à torção desses perfis dificulta a análise de sua estabilidade, e há soluções analíticas exatas para a flambagem de colunas desse tipo apenas para casos envolvendo flambagem elástica por flexão. Para casos mais gerais, entretanto, faz-se necessária a utilização de métodos numéricos ou métodos de energia.

Na literatura, encontram-se algumas formulações para a determinação da força axial crítica de flambagem, entre as quais podem ser citadas Timoshenko e Gere (1961), Lee *et al.* (1972), Ermopoulos (1997), Baptista e Muzeau (1998), Hirt e Crisinel (2001 *apud* Tankova *et al.*, 2018a), Yossif (2008), Marques *et al.* (2012), Marques *et al.* (2014) e Nguyen *et al.* (2021). Lee *et al.* (1972) apresentam, ainda, formulações para perfis submetidos à flexão e à flexão e compressão axial combinadas.

Em relação ao momento crítico de flambagem, muitos trabalhos concentram-se no estudo do problema pelo método dos elementos finitos (MEF) (Bradford, 1988; Braham e Hanikenne, 1993; Yang *et al.*, 1987), sendo escassos os que apresentam expressões analíticas para a sua determinação.

Uma das maneiras de resolver o problema da determinação de momentos críticos de perfis de inércia variável é através de inteligência artificial (IA), em especial com técnicas de *machine learning*.

O *machine learning* é uma das linhas de pesquisa da IA que tem como objetivo encontrar uma relação entre as variáveis de um sistema a partir de dados amostrados. Para a sua aplicação, pode-se utilizar o modelo computacional de redes neurais, que possui capacidade de tratamento de dados, constituindo-se de blocos construtivos de processamento paralelo cuja unidade básica de processamento são os nós (ou neurônios) (Lima, 2014).

Devido à sua capacidade de processar tarefas complexas em um curto período de tempo, o *machine learning* vem sendo amplamente adotado no campo da engenharia estrutural para a predição de parâmetros, como exemplificado nos

trabalhos de Chen *et al.* (2024), Oliveira *et al.* (2024), Hajdú *et al.* (2024), Liu *et al.* (2024) e Possidente e Couto (2025).

Diante dessas considerações, desenvolveu-se, com este trabalho, um modelo de IA baseado em redes neurais artificiais para a determinação dos momentos críticos de flambagem em estruturas com perfis de inércia variável. Para tanto, foi gerado um banco de dados de 15000 amostras a partir de análises numéricas no *software* de elementos finitos ANSYS v.24.1 (Ansys Inc., 2024). Foram estudados os efeitos da escolha das variáveis de entrada (parâmetros geométricos) e de saída da rede (momento ou tensão crítica) no seu desempenho final. Simultaneamente, foi desenvolvido um modelo classificador utilizando um algoritmo *K-nearest neighbors* (KNN) para a classificação dos dados conforme seu modo de flambagem: FLA, FLM e FLT. Assim, foram obtidos modelos específicos de regressão, aplicados à FLA, à FLM e à FLT isoladamente. Esses modelos foram compilados para compor um modelo aplicado a todos os dados, considerando a sua classe. Comparou-se, então, o desempenho do modelo pré-classificado com o modelo original, que desconsidera a classe. Ao final da pesquisa, discutiu-se a performance das redes desenvolvidas e analisou-se a influência da classificação dos dados no desempenho dos modelos. Finalmente, o modelo obtido foi comparado com uma formulação da literatura.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é a obtenção de um modelo para a determinação dos momentos críticos de flambagem de perfis de inércia variável a partir de algoritmos de inteligência artificial.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar revisão bibliográfica das normas e formulações existentes para a determinação das forças e dos momentos críticos de flambagem de perfis de inércia variável;
- Produzir um banco de dados de valores de momento crítico para diferentes geometrias de perfis de inércia variável a partir de modelos numéricos validados;
- Avaliar diferentes arquiteturas de redes neurais para a obtenção do momento crítico de perfis de inércia variável;
- Avaliar diferentes modelos de classificação para a determinação do modo de flambagem de perfis de inércia variável; assim como sua influência na obtenção do momento crítico dos perfis;
- Fazer uma análise comparativa do modelo obtido com uma formulação existente na literatura.

1.3 JUSTIFICATIVA

A utilização de perfis de inércia variável é uma solução construtiva que permite um melhor aproveitamento dos perfis em termos de economia de material e eficiência estrutural, uma vez que concentra seções transversais mais robustas em regiões de maior momento fletor. A obtenção do momento crítico desses perfis permite o estudo de seus fenômenos de instabilidade de forma mais exata e precisa, garantindo segurança nos projetos e otimização no seu dimensionamento.

A norma americana (ANSI/AISC 360-22) e a norma brasileira (ABNT, NBR 8800:2024) não trazem uma formulação específica para o cálculo dos esforços críticos de compressão e flexão de perfis de inércia variável, o que desencoraja seu uso. A norma europeia apresenta um método geral para a determinação do momento crítico de perfis submetidos a flambagem lateral e flambagem lateral com torção, podendo ser aplicado a perfis de inércia variável. Tal método, contudo, apresenta algumas dificuldades para a verificação de barras não uniformes (Silva *et al.*, 2010 *apud*

Marques *et al.*, 2012). De forma complementar, soluções analíticas encontradas na literatura tornam-se muito complexas para determinados tipos de problema.

Nesse contexto, iniciativas de estudos desses perfis a partir de algoritmos de inteligência artificial vêm surgindo na literatura. O *machine learning* permite a análise de um grande volume de dados de forma rápida, o que permite encontrar soluções para problemas de engenharia mais complexos. Assim, este trabalho visa explorar algoritmos de inteligência artificial para a obtenção do momento crítico como uma alternativa ao desenvolvimento de formulações analíticas.

2 REVISÃO DE LITERATURA

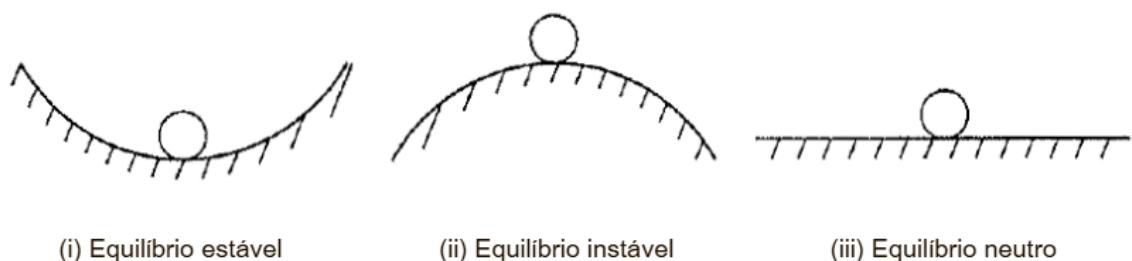
2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1.1 Estabilidade do equilíbrio

Quando se avalia o comportamento das estruturas, a noção de estabilidade aparece sempre associada ao conceito de equilíbrio. A estabilidade de uma configuração de equilíbrio está associada a como a estrutura se comporta após sofrer uma perturbação externa, o que define a classificação dessa configuração (Reis e Camotim, 2001).

O conceito de estabilidade do equilíbrio pode ser facilmente compreendido a partir de um problema clássico. Uma esfera rígida, submetida à ação do seu peso próprio, encontra-se em repouso sobre três superfícies distintas, exibidas na Figura 2, que caracterizam três estados de estabilidade (Reis e Camotim, 2001).

Figura 2 - Configurações de equilíbrio



Fonte: Adaptado de Reis e Camotim (2001).

Conforme explicam Galambos (2008) e Reis e Camotim (2001):

Em (i), a esfera encontra-se sobre uma superfície côncava, caracterizando o equilíbrio estável. Para que haja alguma mudança na configuração do equilíbrio, deve-se adicionar energia.

Em (ii), a esfera encontra-se sobre uma superfície convexa, caracterizando o equilíbrio instável. Libera-se energia à medida que ocorre alguma mudança na configuração.

Em (iii), a esfera encontra-se sobre uma superfície plana, caracterizando o equilíbrio neutro, onde não há mudança no estado de energia.

Os autores destacam que, ao projetar uma estrutura, em especial estruturas esbeltas, devem-se considerar não só critérios de segurança associados à resistência e à deformação dos materiais, como também fenômenos de instabilidade estrutural. Problemas de flambagem, frequentes em estruturas metálicas, constituem fenômenos de instabilidade.

2.1.2 A Coluna de Euler

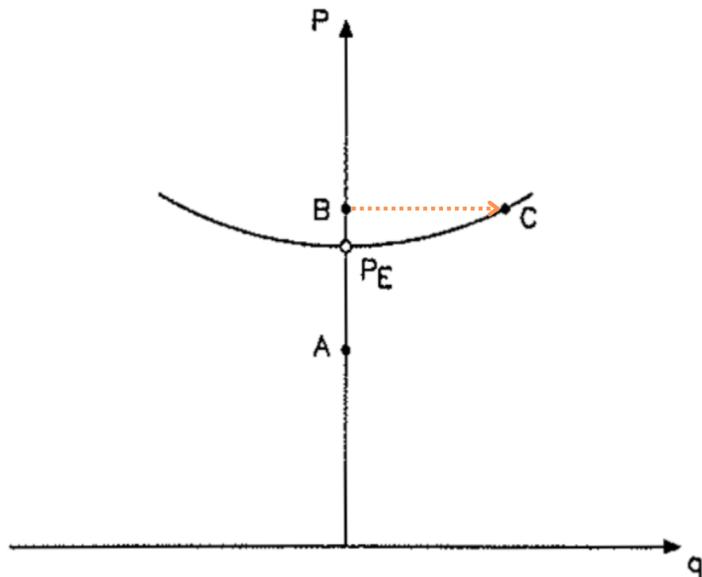
O problema da coluna de Euler elucida o fenômeno da flambagem elástica de elementos comprimidos. Uma coluna de comprimento l , de eixo perfeitamente reto, prismática, constituída de um material elástico linear isotrópico e simplesmente apoiada, é submetida a uma carga P . A Figura 3 ilustra a sua trajetória de equilíbrio, em que q é o deslocamento transversal a meia altura da coluna e cada ponto representa um estado de equilíbrio da estrutura.

Existem duas trajetórias de equilíbrio possíveis: a trajetória fundamental, onde encontram-se os pontos A e B, e a trajetória pós flambagem, sobre a qual está o ponto C. O ponto P_E marca a interseção entre as duas trajetórias, em que ocorre a bifurcação do equilíbrio, o que representa um estado de equilíbrio crítico da estrutura. P_E designa a carga crítica de Euler, determinada pela Equação 1:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da coluna.

Figura 3 - Transição da Coluna de Euler entre dois estados de equilíbrio



Fonte: Reis e Camotim (2001).

Admitindo-se que, em cada estado de equilíbrio, uma força elementar δF perturba a coluna, observa-se que, no ponto A, a coluna regressa à sua configuração inicial. Já o estado de equilíbrio da coluna em B, indeformado e instável, conduz a C, deformado e estável.

2.1.3 Análises Lineares e Não Lineares

As relações existentes entre as ações que atuam sobre uma estrutura e os efeitos provocados por elas definem o seu comportamento estrutural. Para a sua determinação, devem-se considerar equações de equilíbrio e de compatibilidade, bem como relações constitutivas (entre tensões e deformações) e cinemáticas (entre deformações e deslocamentos). As hipóteses associadas a cada uma dessas equações determinam o tipo de análise estrutural a ser adotado (Reis e Camotim, 2001).

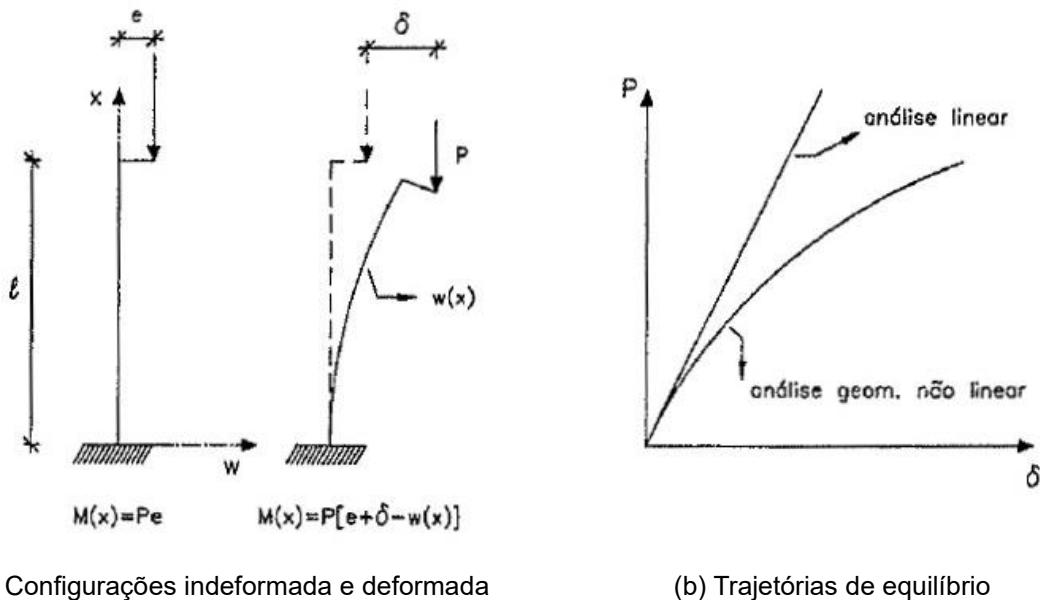
A análise estrutural linear, que configura a mais simples das análises, baseia-se na hipótese da linearidade das equações. Pressupõe linearidade física (relações constitutivas lineares) e geométrica (relações cinemáticas lineares). Quando há

linearidade geométrica, as equações de equilíbrio são escritas na configuração indeformada da estrutura. Essa análise, contudo, é insuficiente para o estudo de fenômenos de instabilidade, visto que tais fenômenos têm natureza intrinsecamente não linear (Reis e Camotim, 2001).

Toma-se, por exemplo, um pilar comprimido por uma força vertical P de excentricidade e , que causa um deslocamento horizontal δ em seu topo. As configurações indeformada e deformada do pilar podem ser vistas na Figura 4a. Observa-se que as trajetórias de equilíbrio linear e não linear (Figura 4b) associadas a ele apresentam comportamentos significativamente distintos. O erro dos valores de δ obtidos a partir da análise linear aumentam à medida que o valor de P aumenta, o que representa um resultado sempre contra a segurança (Reis e Camotim, 2001).

Entretanto, de acordo com Kim (2010), nos estudos de perfis de inércia variável, as análises não lineares realizadas por meio de simulações virtuais com o MEF geralmente resultam em valores estimados de resistência nominal inferiores a dados experimentais. Isso se deve ao fato de que as imperfeições geométricas e tensões residuais internas na análise física são menores em relação aos valores assumidos nas análises computacionais não lineares.

Figura 4 - Comportamento de um pilar comprimido excentricamente



(a) Configurações indeformada e deformada

(b) Trajetórias de equilíbrio

Fonte: Reis e Camotim (2001).

Em muitos casos práticos, uma análise linearizada é suficiente para atingir o objetivo de determinar as cargas críticas de flambagem das estruturas de aço, parâmetros necessários no seu dimensionamento. Diante desse contexto, a análise de flambagem realizada nesta pesquisa, com o desenvolvimento de modelos numéricos no ANSYS Mechanical APDL (Ansys Inc., 2024), emprega um método linearizado e computacionalmente eficiente para estimar o momento crítico teórico de flambagem, apresentando uma aproximação adequada para o problema estudado.

2.2 ESPECIFICAÇÕES NORMATIVAS

2.2.1 Norma Brasileira

A ABNT NBR 8800:2024 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios, em seu Anexo G, define as condições específicas para o dimensionamento de perfis de inércia variável. Em termos de aplicabilidade, o anexo contempla perfis que atendam aos seguintes requisitos: seções transversais do tipo I, H ou caixão, com dois eixos de simetria; mesas com seção constante entre seções contidas contra instabilidade; altura da(s) alma(s) linearmente variável entre seções contidas contra instabilidade.

Segundo o anexo normativo, para a determinação da força axial de compressão resistente de cálculo desses perfis, deve-se utilizar o mesmo procedimento das barras prismáticas, porém, tomando-se as dimensões e as propriedades geométricas da seção de menor altura.

Para a determinação das forças axiais de flambagem elástica, os coeficientes de flambagem por flexão em relação ao eixo perpendicular à alma e de torção devem ser obtidos por análise racional. A flambagem por flexão em relação ao eixo perpendicular às mesas pode ter seu coeficiente determinado como em barras prismáticas. As forças axiais de flambagem para uma barra com seção transversal duplamente simétrica ou simétrica em relação a um ponto, como é o caso de perfis I de inércia variável, é determinada conforme (2), (3) e (4).

- Força crítica para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia x da seção transversal:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{L_x^2} \quad (2)$$

- Força crítica para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia y da seção transversal:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_y^2} \quad (3)$$

- Força crítica para flambagem por torção em relação ao eixo longitudinal z (que passa pelo centro de cisalhamento):

$$N_{ez} = \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\pi^2 EC_w}{L_z^2} + GJ \right] \quad (4)$$

em que:

- L_x e L_y são os comprimentos destravados associados à flexão em relação aos eixos x e y, respectivamente;

- I_x e I_y são os momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos x e y, respectivamente;

- L_z é o comprimento destravado associado à torção;
- E é o módulo de elasticidade do aço;
- C_w é a constante de empenamento da seção transversal;
- G é o módulo de elasticidade transversal do aço;
- J é a constante de torção da seção transversal;
- r_0 é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento.

No que diz respeito ao momento fletor, o momento resistente de cálculo deve ser maior ou igual ao momento fletor solicitante de cálculo da seção em que ocorre a maior tensão de compressão nas mesas. A verificação do estado-limite de flambagem lateral com torção (FLT) deve seguir as mesmas prescrições para perfis prismáticos, mas o fator de modificação para diagrama de momento fletor não-uniforme, C_b , deve ser obtido por análise de estabilidade elástica (ou igual a 1,0, de forma conservadora).

Além disso, para a determinação dos parâmetros de esbeltez λ , λ_p (seções compactas) e λ_r (seções semicompactas) para qualquer estado-limite, adotam-se as propriedades geométricas da seção de maior altura. Os parâmetros são calculados conforme as Equações 5 a 9.

$$\lambda_r = \frac{1,38C_b\sqrt{I_y J}}{r_y J \beta_1} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{27C_w \beta_1^2}{C_b^2 I_y}}} \quad (5)$$

$$C_b = \frac{12,5M_{\max}}{2,5M_{\max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} R_m \quad (6)$$

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E I_y}{L_b^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} \left(1 + 0,039 \frac{J L_b^2}{C_w} \right)} \quad (7)$$

Onde:

$$\beta_1 = \frac{(f_y - \sigma_r)W}{EJ} \quad (8)$$

$$C_w = \frac{I_y (d - t_f)^2}{4} \quad (9)$$

Nessas equações:

- M_{\max} é o valor do momento fletor máximo solicitante de cálculo no comprimento destravado. M_A , M_B e M_C são os valores dos momentos fletores solicitantes de cálculo nas seções situadas a um quarto, ao meio e a três quartos do comprimento destravado, respectivamente. Todos os momentos são dados em módulo e M_B e M_C são medidos a partir da extremidade esquerda.

- R_m é um parâmetro de monossimetria da seção transversal, igual a 1,0 para todas as seções duplamente simétricas (caso dos perfis de inércia variável).

- L_b é a distância entre duas seções contidas à flambagem lateral com torção (comprimento destravado).

- W é o módulo de resistência (mínimo) elástico da seção, relativo ao eixo de flexão.

- r_y é o raio de giração em relação ao eixo y.
- f_y é a resistência ao escoamento do aço, σ_r é a tensão residual de compressão nas mesas (considerada igual a $0,3f_y$), d é a altura total da seção transversal e t_f é a espessura da mesa.

Por fim, a norma indica o texto de Beyer *et al.* (2015), *Proceedings of the Annual Stability Conference, Structural Stability Research Council*, para cálculos mais precisos da força axial e do momento fletor crítico de flambagem. Os autores apresentam o programa de uso livre *LTBeamN* para verificação de estabilidade elástica fora do plano de vigas-coluna, com a consideração de esforços combinados, razão de afilamento do perfil e restrições laterais intermediárias.

Ressalta-se que, na determinação dos esforços resistentes nas barras de seção variável, a norma brasileira considera a seção crítica do perfil para cada requisito, sendo a seção com a menor altura (menor inércia), no cálculo das propriedades geométricas para verificação à compressão, e a seção em que ocorre a maior tensão de compressão nas mesas para a obtenção do momento fletor solicitante na verificação ao momento fletor. Dessa forma, subestima a capacidade resistente desses perfis, não contemplando as particularidades do seu comportamento estrutural, e agindo, portanto, como um desincentivo à sua utilização.

2.2.2 Norma Europeia

A norma europeia (Eurocode 3, EN 1993-1-1:2005), de maneira geral, nunca estabelece valores de grandezas críticas de flambagem (sejam elas forças, momentos, tensões, etc). Todavia, estabelece que, para a determinação da força resistente de instabilidade por compressão e do momento resistente de perfis de inércia variável, deve-se realizar uma análise de segunda ordem, considerando as imperfeições iniciais da barra. Apresenta, também, um método geral para a determinação da força resistente de instabilidade lateral e instabilidade lateral com torção de perfis, incluindo perfis de inércia variável.

O método geral determina que a verificação à instabilidade fora do plano de uma estrutura é feita garantindo que a inequação (10) seja atendida.

$$\frac{\chi_{op}\alpha_{ult,k}}{\gamma_{MI}} \geq 1,0 \quad (10)$$

em que:

- γ_{MI} é o coeficiente de ponderação de resistência para estruturas em que a verificação de instabilidade é realizada por meio de verificações de elementos individuais.

- $\alpha_{ult,k}$ é o amplificador de carga mínimo, aplicado às cargas de projeto, necessário para alcançar a resistência característica da seção transversal mais crítica do componente estrutural. A verificação é em relação ao seu comportamento no plano, sem levar em conta a flambagem lateral ou lateral com torção. Considera todos os efeitos decorrentes da deformação geométrica no plano e das imperfeições, tanto globais quanto locais, quando relevantes.

- χ_{op} é o fator de redução aplicado à esbeltez $\bar{\lambda}_{op}$, definida em (11).

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}} \quad (11)$$

$\alpha_{cr,op}$ é o amplificador mínimo, aplicado às cargas de projeto no plano, necessário para alcançar a carga crítica elástica do componente estrutural em relação à flambagem lateral ou lateral com torção, sem considerar a flambagem por flexão no plano. A determinação de $\alpha_{ult,k}$ e $\alpha_{cr,op}$ pode ser realizada com o método dos elementos finitos.

O fator χ_{op} pode ser determinado das seguintes formas: adotando o valor mínimo de χ (para flambagem lateral) ou χ_{LT} (para flambagem lateral com torção), calculados para a esbeltez global $\bar{\lambda}_{op}$, ou um valor interpolado entre χ e χ_{LT} . Para a interpolação, utiliza-se a fórmula de $\alpha_{ult,k}$ correspondente à seção transversal crítica.

Conforme explica Silva *et al.* (2010) *apud* Marques (2012), algumas dificuldades são encontradas na aplicação do método geral do Eurocode para perfis de inércia variável, como a forma e magnitude das imperfeições, escolha da curva de flambagem adequada e definição da classe e das propriedades da seção transversal.

2.2.3 AISC Design Guide 25

O AISC *Design Guide* 25, elaborado por Kaehler *et al.* (2011), consiste em um guia de projeto de estruturas que contenham perfis de inércia variável, contendo métodos de verificação e requisitos de análise. Limita-se a barras que atendam às seguintes condições:

- A resistência ao escoamento prevista no projeto deve ser inferior a 55 ksi (380 MPa);
- O afilamento da alma deve ser linear ou segmentado linearmente, com ângulo entre 0° e 15°;
- A espessura das mesas deve ser maior que a da alma;
- A razão de esbeltez das mesas deve atender à Equação 12;

$$\frac{b_f}{2t_f} \leq 18 \quad (12)$$

- A largura das mesas deve ser maior que o limite inferior expresso na Equação 13, em cada um dos comprimentos destravados;

$$b_f \geq \frac{h}{7} \quad (13)$$

em que b_f é a largura da mesa, t_f é a espessura da mesa e h é a altura da alma e t_w é a espessura da alma.

- A esbeltez da alma, h/t_w , deve ser inferior ao limite especificado pelo documento, sendo este limite dependente da relação a/h , em que a é a distância livre entre enrijecedores transversais. Para perfis sem enrijecedores transversais ou com enrijecedores em $a/h > 1,5$, essa esbeltez deve atender à Equação 14. Para perfis com enrijecedores em $a/h < 1,5$, a esbeltez da alma deve atender à Equação 15.

$$\frac{h}{t_w} \leq \frac{0,40E}{f_y} \leq 260 \quad (14)$$

$$\frac{h}{t_w} \leq 12 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (15)$$

De acordo com o guia, os estados limites que se referem ao comportamento local das barras podem ser calculados com as mesmas provisões definidas na especificação do AISC para membros prismáticos, utilizando as propriedades da seção no ponto de interesse do perfil. A flambagem local e flambagem por cisalhamento de painéis de alma não reforçados estão incluídas nesse grupo de estados limites.

Os estados limites referentes ao comportamento global dos perfis, por outro lado, requerem ajustes nos procedimentos especificados pelo AISC, de forma a considerar a variação das propriedades da seção ao longo dos comprimentos destravados. Estão incluídos nesse grupo quatro estados limites:

- Flambagem no plano em barras comprimidas (por flexão na maior inércia);
- Flambagem fora do plano em barras comprimidas (por flexão na menor inércia ou torção) e em barras fletidas (flambagem lateral com torção);
- Flambagem (no plano ou fora do plano) ou escoamento devido à carga axial e de flexão combinadas;
- Flambagem por cisalhamento ou escoamento à tração por campo de cisalhamento em painéis de alma enrijecidos.

Para expressar a resistência considerando a instabilidade sob forças de compressão, o guia traz como terminologia chave o termo γ_{eL} (Equação 16), definido como a razão entre a força crítica de Euler do perfil, avaliada no plano de flexão (P_{eL}) e a força axial requerida para a coluna (P_r).

$$\gamma_{eL} = \frac{P_{eL}}{P_r} = \frac{\pi^2 EI}{P_r L^2} \quad (16)$$

Considerando que não há uma solução analítica para o cálculo de P_{eL} em perfis de inércia variável, o manual traz, em seu Apêndice A, vários métodos para o cálculo de P_{eL} e γ_{eL} , incluindo soluções de flambagem por autovalores com elementos finitos, o método de aproximações sucessivas e o método do momento de inércia equivalente, que faz uso de uma equação empírica, sendo este último para casos mais simples.

Para a verificação da flambagem fora do plano, devem-se utilizar as propriedades da seção no ponto médio do comprimento destravado, aplicadas à Equação 17. A carga crítica de flambagem à torção é determinada conforme a Equação 18, com $K_z L$ geralmente tomado como a distância entre os pontos em que a barra está restrita à torção. A Equação 19 apresenta uma expressão recomendada para o cálculo de J em perfis I, como uma alternativa à expressão frequentemente utilizada ($\sum \frac{bt^3}{3}$).

$$P_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_b)^2} \quad (17)$$

$$P_{ez} = \left[\frac{\pi^2 EC_w}{(K_z L)^2} + GJ \right] \frac{1}{r_x^2 + r_y^2} \quad (18)$$

$$J = \frac{ht_w^3}{3} + \frac{b_{ft}t_{ft}^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{t_{ft}}{b_{ft}} \right) + \frac{b_{fc}t_{fc}^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{t_{fc}}{b_{fc}} \right) \quad (19)$$

em que:

- K_y é o coeficiente de flambagem por flexão em relação ao eixo y, geralmente tomado como 1,0, exceto em barras projetadas pelo método do comprimento efetivo e nos casos em que a translação lateral está livre na direção normal ao eixo y da seção transversal;

- K_z é o coeficiente de flambagem por torção;
- r_x é o raio de giração em relação ao eixo x;
- r_y é o raio de giração em relação ao eixo y;
- b_{fc} é a largura da mesa comprimida;
- b_{ft} é a largura da mesa tracionada;
- t_{fc} é a espessura da mesa comprimida;
- t_{ft} é a espessura da mesa tracionada.

A flambagem à flexo-torção também é verificada com as propriedades da seção no ponto médio do comprimento destravado. A carga crítica para esse modo de flambagem é dada pelas expressões 20 e 21.

$$P_{eFT} = \left(\frac{P_{ey} + P_{ez}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4P_{ey}P_{ez}H}{(P_{ey} + P_{ez})^2}} \right] \quad (20)$$

$$H = 1 - \frac{x_o^2 + y_o^2}{\bar{r}_o^2} \quad (21)$$

em que x_o e y_o são as coordenadas do centro de cisalhamento em relação ao centroide e \bar{r}_o é o raio de giração polar em relação ao centro de cisalhamento.

Em relação à verificação da flambagem lateral com torção de perfis submetidos à flexão, o guia descreve o procedimento geral a seguir.

Inicialmente, calcula-se a tensão crítica de flambagem lateral com torção (F_{eLTB}) a partir da Equação 22, com as propriedades da seção do meio do comprimento destravado. C_b é o fator de modificação para flambagem lateral com torção, igual a 1,0 para os casos em que $f_{mid}/f_2 \geq 1$, $f_2 = 0$ ou o perfil esteja em balanço. Do contrário, é definido pela Equação 23.

$$F_{eLTB} = \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{r_t} \right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{J}{W_{xc} h_o} \left(\frac{L_b}{r_t} \right)^2} \quad (22)$$

$$C_b = 1,75 - 1,05 \frac{f_1}{f_2} + 0,3 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 \leq 2,3 \quad (23)$$

em que:

- f_2 é o valor absoluto da maior tensão de compressão na flexão em qualquer extremidade do comprimento não apoiado da aba em consideração. Se a tensão for zero ou de tração em ambas as extremidades da aba, f_2 é considerada zero;

- f_{mid} é a tensão de flexão na mesa considerada no meio do comprimento destravado, sendo considerada positiva para compressão e negativa para tração;

- f_1 é calculado a partir de f_2 e f_0 ;

- f_0 é a tensão de flexão na mesa considerada na extremidade oposta à de f_2 no comprimento destravado, sendo considerada positiva para compressão e negativa para tração;

- W_{xc} é o módulo de resistência elástico referido à mesa comprimida;

- h_o é a distância entre os centroides das mesas;

$$- r_t = \frac{b_{fc}}{\sqrt{12\left(\frac{h_o}{d} + \frac{1}{6}a_w \frac{h^2}{h_o d}\right)}},$$

- a_w é a razão entre duas vezes a área da alma em compressão devido apenas à flexão no eixo de maior inércia e a área da aba comprimida. Seu valor é definido para R_{pg} , que é o fator de redução da resistência à flexão para seções transversais com almas esbeltas (definido no item 5.4.1 do guia);

- J é tomado como zero para esbeltezes da alma maiores que $5,70 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$ ou se $I_{yc}/I_y \leq 0,23$, em que I_{yc} é o momento de inércia em relação a y da mesa comprimida. Do contrário, calcular conforme a Equação 19;

Após o cálculo de F_{eLTB} , determina-se a localização da maior tensão de compressão devido à flexão (f_r) no comprimento destravado. Com ambos os parâmetros definidos, obtém-se o fator γ_{eLTB} , dado por $\gamma_{eLTB} = F_{eLTB}/f_r$.

Posteriormente, é calculado o valor de F_L , tensão de flexão presumida na fibra extrema na transição entre as regiões elástica e inelástica. Caso a inequação (24) seja atendida, determina-se o momento nominal de resistência à flambagem lateral com torção elástica (M_n) conforme (25), para almas esbeltas, ou (26), para outros membros.

$$\frac{\gamma_{eLTB} f_r}{F_y} \leq \frac{F_L}{F_y} \quad (24)$$

$$M_n = R_{pg} \gamma_{eLTB} f_r W_{xc} \quad (25)$$

$$M_n = \gamma_{eLTB} f_r W_{xc} \quad (26)$$

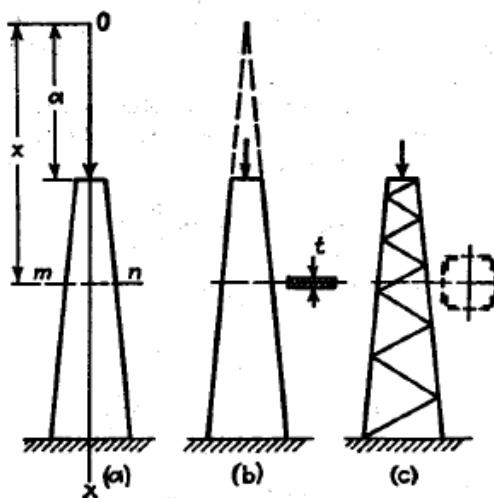
Finalmente, a maior razão de M_r/M_n é atribuída como a razão de resistência à flambagem lateral com torção para todo o comprimento destravado, onde M_r é momento requerido de resistência à flexão.

2.2.4 Outras Formulações

Segundo Dokšanović *et al.* (2023), os primeiros estudos relacionados a perfis de inércia variável são associados a Lagrange, em 1770, e posteriormente a Euler. Conforme explica Galambos (1998), existem diferentes métodos para a determinação da carga crítica de flambagem elástica de perfil de inércia variável. Em problemas mais simples, é possível obter uma solução analítica exata a partir da resolução da equação diferencial da flambagem elástica, como em Bleich (1952) e Timoshenko e Gere (1961). Devido ao fato desse método exigir considerável manipulação matemática, para problemas mais complexos, faz-se necessário usar outros procedimentos de resolução. Alguns dos métodos existentes são os de energia, como o de Timoshenko e Gere (1961); os numéricos, como o método de aproximações sucessivas de Newmark (1943); e aqueles que utilizam do MEF para a discretização do perfil em segmentos prismáticos.

Timoshenko e Gere (1961) desenvolveram uma fórmula geral para a força crítica de barras de seção transversal linearmente variável (Figura 5), definida em (27). O valor de m , expresso na Tabela 1, depende da razão entre o comprimento do trecho (a) exibido na Figura 5 e o comprimento total do perfil (L). É possível observar a variação de m em função da razão entre os momentos de inércia na base (I_2) e no topo (I_1) do perfil.

Figura 5 - Coluna de inércia variável



Fonte: Timoshenko e Gere (1961).

$$P_{cr} = m \frac{EI_{max}}{L^2} \quad (27)$$

Tabela 1 - Valores tabelados para m

I_1/I_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
m	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023	2,128	2,223	2,311	2,392	$\frac{\pi^2}{4}$

Fonte: Timoshenko e Gere (1961).

Alternativamente, os autores também apresentam a resolução de um problema pelo método de energia. Tal método possibilita o cálculo da carga crítica para perfis com diversos trechos de seções transversais diferentes entre si.

Lee *et al.* (1972) realizaram uma análise de perfis I duplamente simétricos de inércia variável, com largura das mesas e espessura das mesas e da alma constantes ao longo de seu comprimento. Presume-se que o plano de carregamento é o plano da alma da barra. A altura do perfil varia de acordo com as equações (28) e (29), em que z representa a distância em relação à menor extremidade e l representa o comprimento do perfil. A razão de afilamento, γ , se dá em função de d_l e d_0 , que se referem à maior e à menor das alturas, em $z = l$ e $z = 0$, respectivamente.

$$d(z) = d_0 \left(1 + \gamma \frac{z}{l}\right) \quad (28)$$

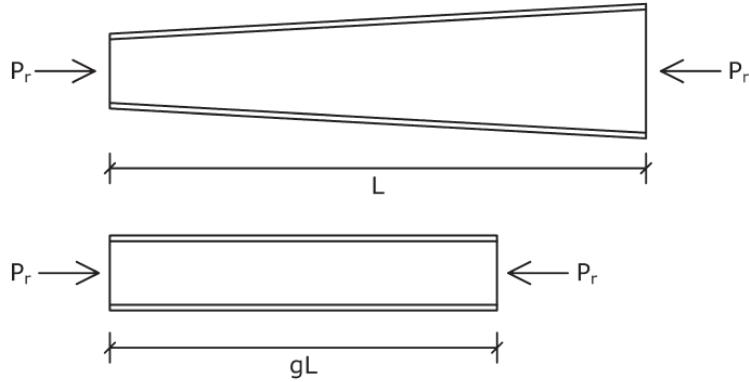
$$\gamma = \frac{d_l}{d_0} - 1 \quad (29)$$

Ainda segundo o autor, para a flambagem dos perfis em torno do eixo de menor inércia, a variação do raio de giração é desprezível, então não é necessário um fator de modificação para o cálculo da carga crítica de flambagem. No eixo de maior inércia, porém, essa variação deve ser considerada através de um fator g (Equação 30). Determina-se, portanto, que a carga crítica (Equação 31) para um perfil de inércia variável é equivalente à carga crítica de um perfil prismático de comprimento gl , com seção transversal igual à menor seção do perfil não uniforme (Figura 6).

$$g = 1,000 - 0,327\gamma + 0,0649\gamma^2(1,00 - 0,0752\gamma) \quad (30)$$

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_{x,min}}{(gl)^2} \quad (31)$$

Figura 6 - Coluna prismática equivalente com comprimento igual a gl



Fonte: Ziemian (2010).

Para perfis sujeitos a momento fletor, Lee *et al.* (1972) também sugerem um fator de modificação (hl) a ser incorporado na equação da tensão crítica de flambagem lateral com torção de perfis prismáticos. Como resultado, obtém-se a Equação 32, válida para perfis de inércia variável. Essa expressão presume um perfil prismático equivalente ao perfil de inércia variável em questão, com altura da seção transversal igual à altura da menor extremidade (Figura 7).

$$(\sigma_{cr})_y = \frac{1}{W_{x_0}} \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y G J_0}{hl^2} + \frac{\pi^4 EI_y E C_{w_0}}{hl^4}} \quad (32)$$

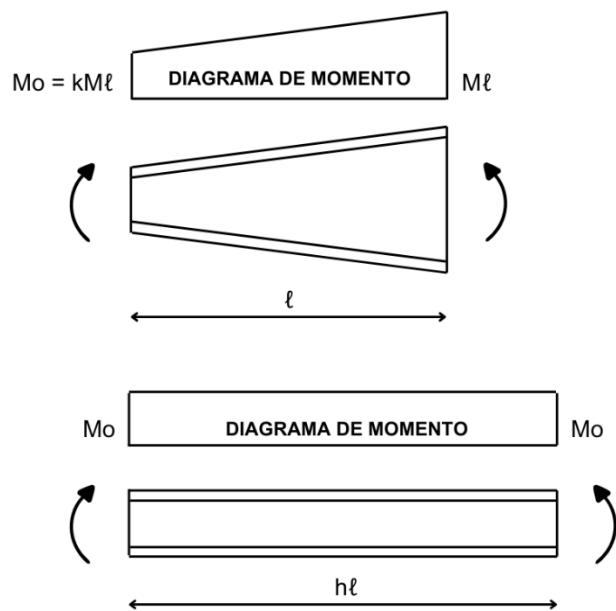
em que:

- $(\sigma_{cr})_y$ é tensão crítica de flambagem de um perfil de inércia variável;
- W_{x_0} é o módulo de resistência elástico da menor seção transversal;
- G é o módulo de elasticidade transversal do material;
- J_0 é a constante de torção da menor seção transversal;
- C_{w_0} é a constante de empenamento da menor seção transversal;
- hl é o comprimento do perfil prismático equivalente.

Os autores calcularam 128 valores de h presumindo diversos comprimentos para as seções transversais I, II, III e IV definidas na Tabela 2. Foi observada uma forte correlação entre a razão de afilamento do perfil e sua tensão crítica. A partir dos

dados determinados para as diferentes seções, da razão de afilamento e de prescrições determinadas pela AISC, determinaram-se expressões para h para seções finas e profundas (esbeltas - h_w) e seções espessas e curtas (compactas - h_s). A expressão para seções compactas (Equação 34) foi desenvolvida a partir de dados das seções I e III. Para a definição da expressão para seções esbeltas (Equação 33), foi necessário calcular novos valores de h com uma seção V, também definida na Tabela 2.

Figura 7 - Perfil prismático equivalente para perfis de inércia variável submetidos a momento fletor



Fonte: Adaptado de Lee *et al.* (1972).

Tabela 2 - Seções transversais analisadas por Lee *et al.* (1972)

Dimensão	Seção transversal				
	I	II	III	IV	V
d_0 (pol.)	6,00	6,00	6,00	6,00	12,00
b (pol.)	4,00	12,00	4,00	12,00	6,00
t_f (pol.)	0,25	0,25	0,75	0,75	0,25
t_w (pol.)	0,10	0,10	0,25	0,25	0,10

Fonte: Lee *et al.* (1972)

$$h_w = 1,00 + 0,00385\gamma \sqrt{l/r_{T_0}} \quad (33)$$

$$h_s = 1,00 + 0,0230\gamma \sqrt{\frac{ld_0}{A_f}} \quad (34)$$

em que:

- r_{T_0} é o raio de giração de uma seção que compreende a mesa de compressão mais um terço da área da alma em compressão, calculado em relação a um eixo no plano da alma;
- A_f é a área da mesa comprimida.

Ermopoulos (1997) utilizou um modelo semelhante ao proposto pela então norma europeia para a obtenção de equações de equilíbrio de perfis não uniformes comprimidos, nos modos com e sem deslocamento lateral. A partir de um procedimento iterativo, obtiveram-se as cargas críticas e os comprimentos de flambagem equivalentes, resultados expressos em forma tabular e gráfica.

Baptista e Muzeau (1998) apresentaram uma formulação obtida a partir da adição de novos coeficientes k às relações dispostas na norma europeia. Realizaram-se simulações numéricas para obter funções analíticas expressas em forma de ábaco.

Hirt e Crisinel (2001 *apud* Tankova *et al.*, 2018a) desenvolveram uma expressão (35) para o cálculo da força crítica de perfis de inércia variável a partir da definição de um momento de inércia equivalente (36) para esses perfis, a depender do tipo de variação da alma. Esse momento de inércia deriva de um coeficiente C (37), que depende de r (38), raiz quadrada da razão entre os momentos de inércia mínimo e máximo em relação ao eixo y da seção transversal.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{eq}}{L^2} \quad (35)$$

$$I_{eq} = CI_{y,max} \quad (36)$$

$$C = 0,08 + 0,92r \quad (37)$$

$$r = \sqrt{\frac{I_{y,\min}}{I_{y,\max}}} \quad (38)$$

Yossif (2008) determinou a carga crítica elástica de elementos não prismáticos para várias faixas de razão de afilamento e condições de apoio através da modificação de equações de estabilidade. Observou-se um aumento da carga crítica com o aumento dessa razão. A formulação da carga crítica desenvolvida (Equação 39) tem como um dos termos um coeficiente C e adota o momento de inércia da menor seção do perfil. Os valores para C estão exibidos na Tabela 3.

$$N_{ex, \text{Yossif}} = C \frac{\pi^2 EI_{x, \min}}{L^2} \quad (39)$$

Tabela 3 - Valores tabelados para o coeficiente C de Yossif

Razão de afilamento, u	Apoiado - apoiado	Engastado - apoiado	Engastado - livre	Engastado – engastado contraventado	Engastado – apoiado com rígido
1,00	1,000000	2,045752	0,250000	1,000000	0,250000
1,25	1,403221	2,686418	0,305275	1,408521	0,400397
1,50	1,861839	3,799353	0,359792	1,884961	0,588814
1,75	2,374610	4,835264	0,413758	2,430482	0,816179
2,00	2,940594	5,973663	0,467305	3,046091	1,083267
2,25	3,559051	7,212586	0,520523	3,732678	1,390733
2,50	4,229384	8,550445	0,573474	4,491039	1,739143
2,75	4,951100	9,985920	0,626206	5,321891	2,128983
3,00	5,723784	11,517898	0,678754	6,225885	2,560683
3,25	6,547083	13,145426	0,731146	7,203613	3,034618
3,50	7,420691	14,867678	0,783404	8,255618	3,551121
3,75	8,344343	16,683930	0,835545	9,382400	4,110491
4,00	9,317802	18,593542	0,887584	10,584418	4,712994
4,25	10,340863	20,595945	0,939533	11,862098	5,358870
4,50	11,413338	22,690629	0,991402	13,215834	6,048330
4,75	12,535063	24,877132	1,043199	14,645992	6,781574
5,00	13,705886	27,155038	1,094931	16,152913	7,558780
1,00	1,000000	2,045752	0,250000	1,000000	0,250000

Fonte: Yossif (2008).

Marques *et al.* (2012) desenvolveram uma metodologia de verificação à flambagem por flexão no plano para colunas de inércia variável sujeitas à força axial constante, condizente com as atuais regras da EN 1993-1-1:2005. Realizou-se a

derivação de uma formulação de Ayrton-Perry e, posteriormente, um estudo paramétrico com mais de 350 simulações numéricas variando a razão de afilamento das colunas. Ao aumentar essa razão, foi observado um aumento gradual na resistência dos perfis para todas as faixas de esbeltez avaliadas. Foi necessário alterar alguns aspectos da norma europeia, como a inclusão de um fator adicional β , que considera o comportamento de segunda ordem desses perfis, e a modificação e recalibração do atual fator de imperfeição do Eurocode.

Marques *et al.* (2014) aplicaram o método de Rayleigh-Ritz para a obtenção de uma fórmula para a determinação da força crítica da flambagem no plano de colunas de inércia variável simplesmente apoiadas. O valor é dado em função da força crítica da menor seção do perfil, $N_{ex,min}$, descrito nas Equações 40 e 41.

$$N_{ex} = A \cdot N_{ex,min} \quad (40)$$

$$A = \gamma_I^{0,56} (1 - 0,04 \cdot \tan^{-1}(\gamma_I - 1)) \quad (41)$$

em que $\gamma_I = I_{y,max}/I_{y,min}$ e A é a área da seção transversal.

Tankova *et al.* (2018b) apresentaram uma formulação geral para a verificação à estabilidade de perfis com carregamento e geometria variável e condições complexas de apoio. O método toma a forma de flambagem crítica como a imperfeição inicial e considera as contribuições de segunda ordem para cada seção transversal ao longo do comprimento da barra.

Tankova *et al.* (2018a) realizaram estudos experimentais em colunas, vigas e vigas-coluna relativos ao comportamento de flambagem de perfis de inércia variável de seção I. Os resultados forneceram uma validação física adicional ao método proposto por Marques *et al.* (2012).

Nguyen *et al.* (2021) desenvolveram uma fórmula a partir de algoritmos de redes neurais para a previsão da carga crítica de colunas de inércia variável de seções I. O modelo numérico desenvolvido foi validado com os dados experimentais de Tankova *et al.* (2018), e comparou-se a formulação obtida com as de Galambos (1998), Hirt & Crisinel (2001 *apud* Nguyen *et al.*, 2021); Lee *et al.* (1972) e Marques *et al.* (2012). O modelo mostrou-se com mais acurácia do que o dos existentes. Posteriormente, Nguyen *et al.* (2023) realizaram um estudo similar, mas voltado para perfis corroídos.

Apesar da descrição de diversos pesquisadores da flambagem provocada por forças axiais de compressão, as abordagens para perfis fletidos são muito mais escassas.

Braham e Hanikenne (1993) desenvolveram um método para verificação de flambagem lateral com torção de vigas de inércia variável, em que o momento crítico é dado pela Equação 42. Esse método foi comparado com simulações computacionais, restritas a vigas com almas trapezoidais, de mesas iguais e constantes, diagrama linear de momento fletor e sem flambagem local ou distorção da seção transversal.

$$M_{cr,Braham} = \frac{\pi^2 EI_{zf}}{L_{LT}^2} (d_{eq} + t_{f1}/2 + t_{f2}/2) \quad (42)$$

em que:

- I_{zf} é a inércia transversal da mesa comprimida da viga;
- L_{LT} é o comprimento de flambagem lateral;
- t_{f1} e t_{f2} são as espessuras das mesas da viga;
- d_{eq} é o fator crítico elástico, simplificado para $d_{eq} = (d_1 + d_2)/2$, em que d_1 e d_2 são a maior e a menor altura da seção transversal, respectivamente.

Kováč (2012), utilizando o método de Rayleigh-Ritz, modificou duas equações diferenciais, desenvolvidas por Vlasov, para o caso de perfis de inércia variável submetidos a FLT. O estudo foi realizado para seções transversais I duplamente simétricas, considerando a variação da altura da alma e da razão de afilamento. As equações foram validadas a partir de um estudo paramétrico com vários programas de abordagem unidimensional, e posteriormente com o Ansys, com abordagem tridimensional.

Andrade *et al.* (2007) apresentaram uma formulação para análise do comportamento de vigas de inércia variável monossimétricas de paredes finas sujeitas à FLT. A determinação dos momentos críticos se deu através da implementação de um procedimento numérico com a utilização do método de Rayleigh–Ritz.

Raftoyiannis e Adamakos (2010) propuseram, por meio de uma análise numérica, fatores de modificação do momento crítico para diferentes razões de afilamento da alma de vigas I de inércia variável submetidas à FLT. A análise foi realizada para diferentes condições de apoio e carregamento. Constatou-se que, para

vigas simplesmente apoiadas, o momento crítico diminui à medida que a razão de afilamento aumenta. Nas vigas com apoios fixos, entretanto, esse efeito é inverso.

Asgarian *et al.* (2013) investigaram um modelo teórico e um numérico para estabilidade de vigas de paredes finas sujeitas à FLT, com seções transversais e condições de apoio arbitrárias. As cargas de flambagem foram obtidas realizando uma expansão em séries de potências e da resolução do problema de autovalor do sistema algébrico resultante. Os resultados foram comparados com simulações numéricas no software Ansys, obtendo um erro relativo inferior a 1% na maioria dos casos.

Trahair (2014) apresentou um procedimento para determinar o momento crítico de vigas contínuas ou com travamentos, considerando a distribuição de momentos no perfil, a razão de afilamento e os efeitos das restrições entre cada segmento. O momento crítico é definido conforme a Equação 43, que tem como vantagem a separação dos efeitos do carregamento e da geometria da viga. As soluções mostraram-se conservadoras ou próximas das soluções precisas, obtidas com o MEF.

$$M_t = C_{bm} C_{bt} \sqrt{\left\{ \left(\frac{\pi^2 E I_{yL/2}}{(kL)^2} \right) \left(G_{L/2} + \frac{\pi^2 E C_{wL/2}}{(kL)^2} \right) \right\}} \quad (43)$$

Onde:

- C_{bm} e C_{bt} são os fatores de modificação que levam em conta a distribuição do momento na viga e a razão de afilamento, respectivamente;
- k é um fator de comprimento efetivo que considera os efeitos das restrições nas extremidades contra a rotação em torno do eixo menor e contra a empenamento;
- $I_{yL/2}$, $G_{L/2}$ e $C_{wL/2}$ são as propriedades da seção na metade do segmento de comprimento L .

Couto (2022) desenvolveu um modelo de redes neurais para o cálculo do momento crítico de vigas prismáticas e de inércia variável, monossimétricas e duplamente simétricas. Foram analisadas barras simplesmente apoiadas e fletidas no eixo de maior inércia. Os resultados obtidos para os perfis de inércia variável foram comparados com modelo que utiliza MEF desenvolvido por Asgarian *et al.* (2013).

3 MACHINE LEARNING

3.1 APRENDIZADO SUPERVISIONADO E NÃO SUPERVISIONADO

O *machine learning* é um campo de estudo da ciência da computação em que os computadores aprendem a realizar tarefas sem serem explicitamente programados para tal. Classifica-se, de forma principal, em dois tipos: aprendizado supervisionado e aprendizado não supervisionado. No aprendizado supervisionado, que é utilizado neste trabalho, o conjunto de dados de treinamento fornecido ao algoritmo contém rótulos, que são as soluções desejadas. Através da procura entre um padrão entre dois *datasets*, o algoritmo tenta, a partir de dados de entrada, predizer saídas (Géron, 2021; Trask, 2019).

A regressão e a classificação são tarefas típicas de aprendizado supervisionado. O algoritmo, por meio de um conjunto de variáveis preditoras, busca prever uma variável alvo (regressão) ou uma classe conhecida (classificação). A previsão do momento crítico de um perfil de aço de inércia variável a partir de suas características geométricas e de material configura um problema que pode ser solucionado utilizando um algoritmo de regressão. Atribuir um rótulo (classe) a esse perfil conforme seu modo de flambagem constitui uma tarefa de classificação.

3.2 ESCALONAMENTO DOS DADOS

De forma geral, os algoritmos de *machine learning* não funcionam bem quando os dados de entrada têm escalas muito diferentes. As duas principais técnicas para escalar as variáveis de entrada são a normalização e a padronização (Géron, 2021).

Na normalização, os valores são vinculados a um intervalo de 0 a 1 a partir da operação definida na Equação 44 para cada uma das amostras x dos dados de entrada.

$$x_{std} = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (44)$$

em que:

- x_{min} e x_{max} são os valores mínimo e máximo da variável de entrada, respectivamente;

- x_{std} é o novo valor de x entre 0 e 1, normalizado.

A padronização, por outro lado, transforma cada uma das amostras x dos conjuntos de dados em um novo número z (escore padrão), expresso na Equação 45. O escore padrão informa quantos desvios padrão um dado está acima ou abaixo da média.

$$z_{escore} = (x - u)/s \quad (45)$$

em que:

- u é a média do conjunto de dados de treino;
- s é o desvio padrão do conjunto de dados de treino.

Diferente da normalização, a padronização não vincula os valores a um intervalo específico, o que faz com que essa transformação seja menos sensível a dados discrepantes, normalmente chamados de *outliers* (Géron, 2021).

3.3 CLASSIFICAÇÃO

Tarefas de classificação têm como objetivo especificar a qual das C categorias uma entrada pertence. Durante o processo de aprendizagem, o modelo é solicitado a produzir uma função $f: R^n \rightarrow \{1, \dots, C\}$ (Goodfellow *et al.*, 2015). Dentre os algoritmos de *machine learning*, são diversas as opções de algoritmos para esta finalidade. Há, por exemplo, algoritmos baseados em distâncias como o *Support Vector Machines* (SVM) que separam classes utilizando hiperplanos em espaços de alta dimensão, o algoritmo *K-nearest neighbors* (KNN), que classifica com base em vizinhos próximos. Algoritmos baseados em redes neurais e aprendizado profundo (que serão discutidos em detalhes posteriormente) também podem ser usados nessa tarefa, dentre os quais destacam-se o *Multi-Layer Perceptron* (MLP), as redes

convolucionais (usadas principalmente na classificação de imagens) ou as redes recorrentes (geralmente mais aplicáveis a dados sequenciais). Uma alternativa são os modelos baseados em árvores, como as árvores de decisão (*decision trees*) ou o algoritmo *Random forest*, que combina múltiplas árvores de decisão. Muitas são as alternativas para a tarefa de classificação, mas destaca-se por sua facilidade de implementação o algoritmo KNN.

O algoritmo KNN não realiza o treinamento de um modelo de forma convencional, mas simplesmente armazena instâncias dos dados de treinamento. A classificação de um novo dado é determinada a partir da proximidade do seu ponto em relação aos seus k vizinhos mais próximos. A previsão da categoria desse dado será a classe predominante entre seus vizinhos.

Por padrão, o *KNeighborsClassifier*, da *scikit-learn*, utiliza a distância de Minkowski – Equação 46 – como métrica para computar a distância entre o ponto de referência e seus vizinhos. Para $p = 2$, essa métrica resulta na distância euclidiana, ponderada (aplicando pesos w) ou simples ($w = 1$).

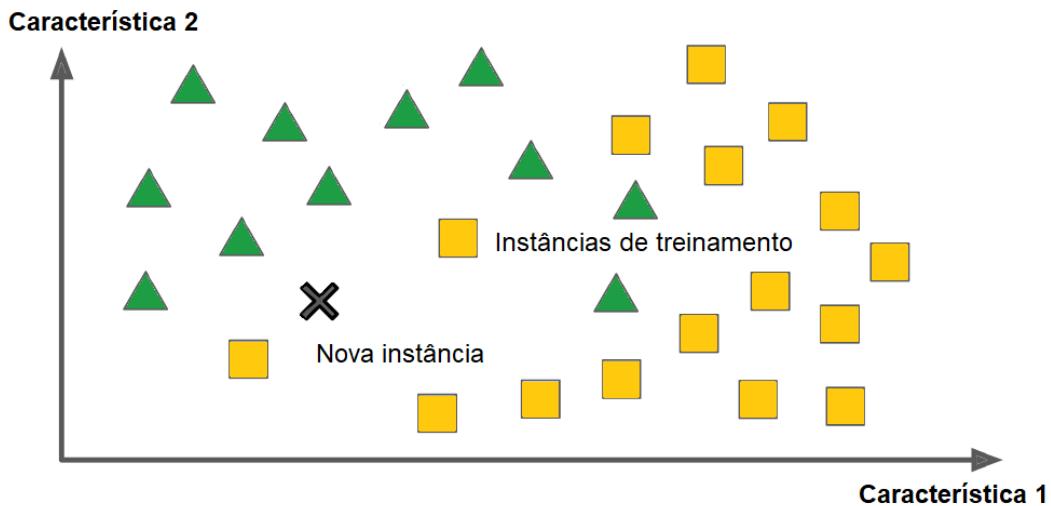
$$\left(\sum w \cdot |x - y|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (46)$$

em que:

- x e y representam os vetores do ponto de referência e do conjunto de treinamento, respectivamente;
- w são os pesos que podem ser aplicados às dimensões dos vetores.

Graficamente, o algoritmo KNN pode ser representado pela Figura 8. Neste exemplo, o algoritmo dispõe os dados de treinamento, conhecidos (com sua classe definida) em um espaço bidimensional, em função de duas características (variáveis preditivas do modelo). Uma nova instância (marcador “X”), então, é alocada nesse plano, e observa-se a sua proximidade em relação aos seus vizinhos. A classe da maioria dos vizinhos (classe 1 - triângulo ou classe 2 - quadrado) determina a classe dessa instância.

Figura 8 - Exemplo de algoritmo KNN com duas classes e duas características



Fonte: Adaptado de Raafat (2022).

3.4 REGRESSÃO

Assim como as tarefas de classificação, as tarefas de regressão podem ser realizadas com diversos algoritmos de *machine learning*. Em tarefas simples, pode-se usar uma regressão linear simples ou múltipla para a determinação de uma resposta em função de parâmetros de entrada. Para que o desempenho da regressão seja adequado, evidentemente, a relação entre entradas e saídas deve ser linear. Alternativamente, alguns modelos baseados em árvores como as árvores de regressão e o *Random Forest Regressor* também podem ser usados nessa tarefa. Nesses algoritmos, os dados são divididos em subconjuntos que são então designados a uma tarefa de regressão. Há também algoritmos baseados em distâncias. O algoritmo KNN, por exemplo, pode ser utilizado para regressão, identificando dados vizinhos e tomando um tipo de média entre eles para a previsão.

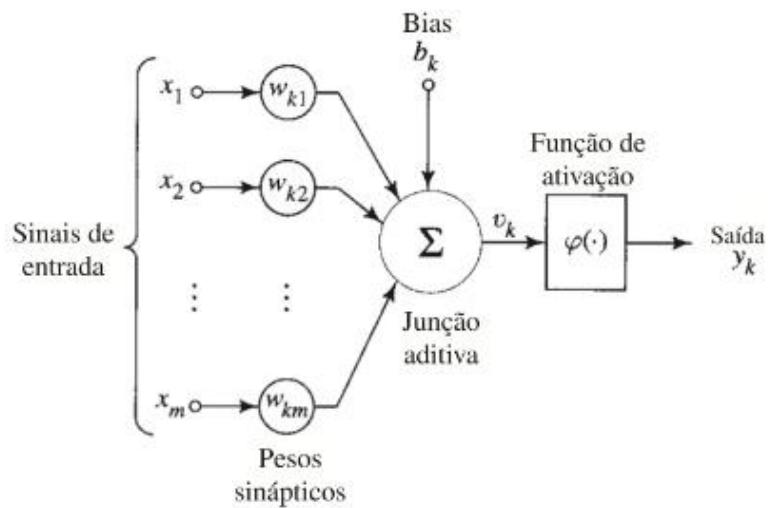
Dentre os modelos mais populares para regressão, estão as redes neurais artificiais. Redes neurais artificiais constituem um modelo de *machine learning* inspirado nas redes neurais cerebrais (Gerón, 2021). São processadores que modelam o funcionamento do cérebro humano, o qual tem a capacidade de processar informações de forma altamente complexa, não-linear e paralela. Sua unidade básica

de processamento são os neurônios, entre os quais as forças de conexão são chamadas pesos sinápticos. Estes podem ser organizados em uma ou múltiplas camadas. Através da experiência adquirida a partir da interação com o ambiente, a rede neural realiza o seu processo de aprendizagem. Esse procedimento, denominado algoritmo de aprendizagem, define de que forma será realizado o ajuste dos pesos sinápticos dos neurônios para alcançar o objetivo de projeto desejado (Haykin, 2007). Pela simplicidade, versatilidade e relativa facilidade de implementação, esse tipo de algoritmo será usado neste trabalho.

3.4.1 Neurônios e funções de ativação

A Figura 9 exibe o modelo não-linear de um neurônio, com seus três elementos básicos representados: sinapses, somadores e funções de ativação.

Figura 9 - Modelo não-linear de um neurônio



Fonte: Haykin (2007).

As sinapses (elos) são caracterizadas por um peso próprio w_{kj} , que multiplica um sinal de entrada x_j . O índice k refere-se ao neurônio em questão e o índice j refere-se ao terminal de entrada da sinapse. As operações de soma dos sinais de entrada ponderados pelas sinapses compõem um combinador linear. A função de ativação, ou

função restritiva, limita os valores possíveis para o sinal de saída da rede. O *bias*, b_k , é um valor externo aplicado à função de ativação que pode aumentar ou diminuir sua saída. É possível descrever um neurônio k na forma do par de equações (47) e (48) (Haykin, 2007):

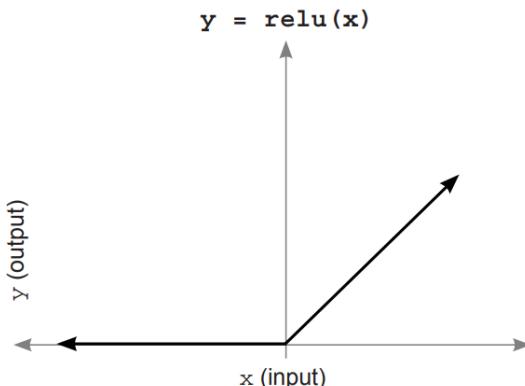
$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (47)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (48)$$

onde u_k é a saída do combinador linear e $\varphi(\cdot)$ é a função de ativação.

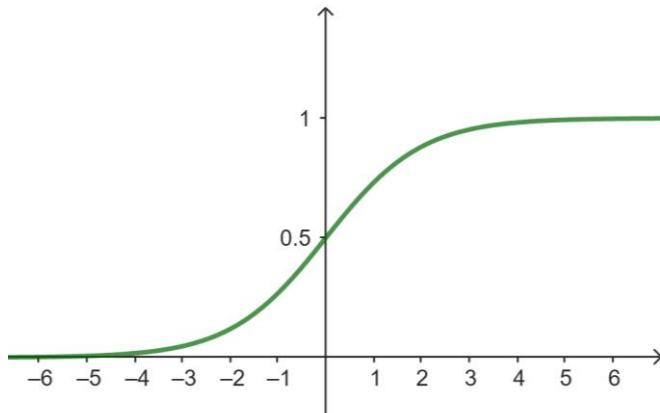
De acordo com Trask (2019), a função de ativação é qualquer função que recebe um número e retorna outro número, sendo aplicada aos neurônios da rede neural durante a previsão. As funções unidade linear retificada (ReLU, do inglês *Rectified Linear Unit* - Figura 10), sigmoide (Figura 11) e tangente hiperbólica (Figura 12) são exemplos comumente empregados.

Figura 10 - Função ReLU



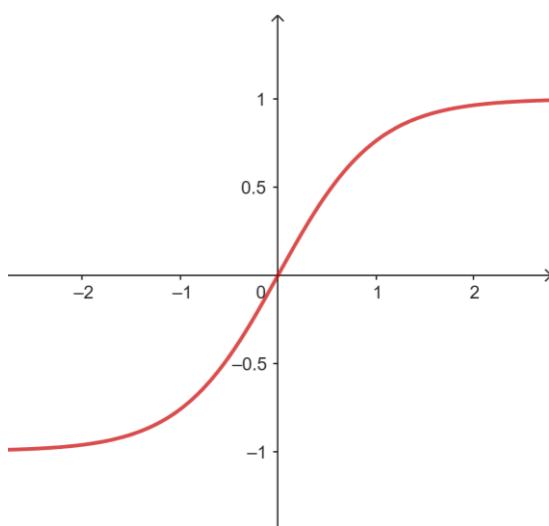
Fonte: Trask (2019).

Figura 11 - Função sigmoide



Fonte: Autora (2025).

Figura 12 - Função tangente hiperbólica



Fonte: Autora (2025).

As funções de ativação requerem algumas restrições: devem ser contínuas e infinitas em seu domínio, existindo uma saída para cada entrada. Além disso, uma boa função de ativação é monotônica, não linear e computacionalmente eficiente (Trask, 2019).

Funções monotônicas nunca mudam de direção, sempre crescem ou decrescem. Essa característica elimina os casos em que dois valores de entrada podem ter o mesmo valor de saída, mitigando o problema de não existir uma direção correta para reduzir o erro. Funções não lineares possuem ondas (como a função sigmoide ou a tangente hiperbólica) ou giram (como a função ReLU). Funções

computacionalmente eficientes tornam a tarefa de chamar a mesma função por várias vezes menos lenta e custosa (Trask, 2019).

Haykin (2007) identifica a função de limiar (ou *Heaviside*) e a função sigmoide como tipos básicos de função de ativação. A função de limiar, definida pela Equação 49, é binária, uma vez que tem duas saídas possíveis (0 ou 1), a depender da entrada ser um valor negativo ou não negativo. Pode ser usada para classificações simples, por exemplo.

$$\varphi(v) = 1 \text{ se } v \geq 0; \varphi(v) = 0 \text{ se } v < 0 \quad (49)$$

A função sigmoide configura a forma mais comum de função de ativação no desenvolvimento de redes neurais artificiais. Tem como características o formato em s, ser estritamente crescente e um intervalo contínuo de valores de saída, entre 0 e 1. Essa saída pode ser particularmente interessante quando se deseja interpretá-la como uma probabilidade. Em relação à função de limiar, tem como vantagem ser diferenciável. A função logística, definida pela Equação 50, é um exemplo de função sigmoide. Nessa expressão, a é um parâmetro de inclinação (Haykin, 2007; Trask, 2019).

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + \exp(-av)} \quad (50)$$

As funções definidas em (49) e (50) têm como imagem valores entre 0 e +1. Em alguns casos, é conveniente que os valores de saída de uma função de ativação estejam entre -1 e 1, trazendo a possibilidade de correlação negativa, como é o caso da tangente hiperbólica (Equação 51). Assim, o gráfico dessas funções assume um formato antissimétrico em relação à origem. Além do mais, as saídas de cada camada estarem em torno de 0 no começo do treinamento acelera a convergência. (Gerón, 2021; Haykin, 2007; Trask, 2019).

$$\varphi(v) = \tanh(v) \quad (51)$$

Adicionalmente, Gerón (2021) cita a ReLU como uma função de ativação popular na arquitetura de rede MPL, a ser descrita no tópico 3.4.4. Apesar de não ser diferenciável em $z = 0$, tem como benefício a agilidade de cálculo e não ter um valor

máximo de saída, o que pode ser útil no processo de ajuste dos pesos pelo algoritmo de otimização. Sua expressão é definida em (52).

$$ReLU(z) = \max(0, z) \quad (52)$$

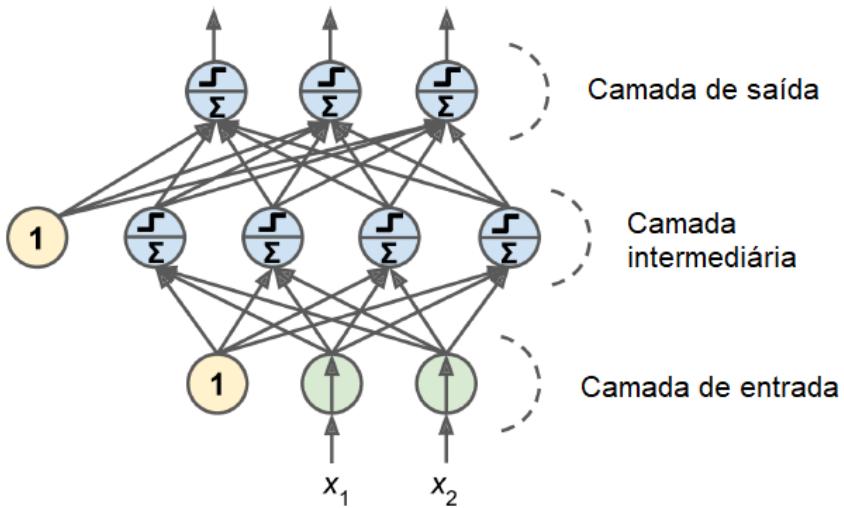
3.4.2 Arquiteturas de rede

Em linhas gerais, uma rede neural é constituída de camadas de entrada, de saída e intermediárias (ou ocultas) entre elas. As camadas ocultas são assim designadas porque o algoritmo não especifica as saídas desejadas para elas, mas sim para as camadas de saída. A forma como os neurônios estão estruturados, aliada aos algoritmos de aprendizado utilizados, define a arquitetura de uma rede neural (Goodfellow *et al.*, 2015; Haykin, 2007).

Em relação ao fluxo de informação da rede, estas classificam-se em dois tipos principais: redes *feedforward* e redes recorrentes. Nas redes *feedforward*, o sinal circula em apenas uma direção, das entradas às saídas. Redes recorrentes, por outro lado, possuem conexões de *feedback*, em que o modelo realimenta a si mesmo (Gerón, 2021; Goodfellow *et al.*, 2015; Haykin, 2007).

Uma das arquiteturas mais simples das redes neurais artificiais é a *Perceptron*. É composta por uma única camada de um ou mais neurônios denominados unidade lógica de limiar (LTU, do inglês *linear threshold unit*). O nome *Perceptron*, por vezes, é usado para se referir a uma rede com uma única LTU. Uma *Perceptron* com múltiplas camadas ocultas é chamada *Multi-Layer Perceptron* (MLP), exibida na Figura 13. Com exceção à camada de saída, todas as camadas da MLP possuem um *bias* associado a ela e estão totalmente conectadas à camada posterior (Gerón, 2021).

Figura 13 - Multi-Layer Perceptron



Fonte: Adaptado de Gerón (2021).

Um algoritmo muito eficiente para o treinamento das MLP's é o *backpropagation*, que se baseia na regra de aprendizagem por correção de erro. A aprendizagem acontece em dois passos: primeiramente, o algoritmo realiza uma predição (*forward pass*) e obtém o erro. No segundo passo, propaga-se no sentido inverso (*reverse pass*), camada por camada, calculando a contribuição do erro associada a cada conexão. Finalmente, o erro é reduzido com os ajustes dos pesos sinápticos (Gerón, 2021; Haykin, 2007).

3.4.3 Otimizadores e taxa de aprendizado

O algoritmo de otimização de um modelo de redes neurais tem o objetivo de minimizar a sua função de custo. Esse algoritmo possui uma taxa de aprendizado, que está relacionada à quantidade de iterações necessárias para o otimizador convergir. Taxas de aprendizado muito baixas demoram a convergir, enquanto taxas de aprendizado muito altas podem ter dificuldade de encontrar uma solução (Gerón, 2021; Goodfellow *et al.*, 2015).

3.4.4 Regressão com MLP's

As MLP's podem ser utilizadas para problemas de regressão, adequando a quantidade de neurônios de saída às dimensões de saída almejadas. Em geral, não é desejável ter uma função de ativação para os neurônios de saída, de forma que estes fiquem livres para gerar uma previsão sem qualquer restrição de valores (Gerón, 2021).

3.4.5 Ajuste de hiperparâmetros

Hiperparâmetros são parâmetros associados ao algoritmo de aprendizagem de um modelo de *machine learning*. Os principais parâmetros de uma rede neural incluem taxa de aprendizado, número de neurônios por camada, número de camadas ocultas, função de ativação, número de gerações no processo de treinamento, otimizador, entre outros.

Explorar as possibilidades de hiperparâmetros até encontrar uma boa arquitetura de rede muitas vezes é uma tarefa demorada, se realizada de forma manual. Assim, há algoritmos que permitem automaticamente estabelecer uma maneira sistematizada de determinar o conjunto de hiperparâmetros que leva ao melhor desempenho da rede. Dentre eles, o algoritmo de *Grid Search* possibilita o ajuste de hiperparâmetros da rede através da avaliação dos modelos derivados de todas as combinações possíveis de hiperparâmetros.

4 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho, duas etapas importantes foram necessárias. Inicialmente, realizou-se a formação de um banco de dados a partir de um conjunto de análises numéricas de flambagem no ANSYS Mechanical APDL (Ansys Inc., 2024). Esses dados, então, serviram como base de dados para o emprego das técnicas de *machine learning*, que envolveram etapas de classificação dos modelos segundo o estado-limite último dominante na análise e a determinação das tensões (ou momentos) críticos com algoritmos de regressão. Esta seção descreve os detalhes de cada uma dessas etapas.

4.1 DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Os modelos numéricos utilizaram elementos de casca (tipo SHELL181) para a representação do perfil e elementos rígidos nas extremidades (MPC184) para aplicação de condições de contorno. Um modelo paramétrico foi desenvolvido no software, permitindo a variação da geometria do modelo, do carregamento aplicado e de suas condições de contorno.

Em relação à geometria, definiram-se quatro grupos de perfis, com as seguintes alturas da seção transversal de maior inércia (d_1): 300, 600, 900 e 1200 mm. A escolha desses valores para d_1 não seguiu um critério específico, mas foi feita com base em uma ordem de grandeza adequada para o problema. A partir da multiplicação de d_1 por determinados coeficientes k_n , obtiveram-se os valores para os demais parâmetros dos perfis. Os intervalos foram estabelecidos de acordo com as disposições de aplicabilidade da *Design Guide 25*. Os parâmetros, assim como seus coeficientes, estão exibidos na Tabela 4. A geometria típica do modelo, com sua seção transversal e vista lateral, está representada na Figura 14.

No treinamento de um modelo, é importante que o volume e a diversidade de dados sejam adequados de forma a obter um conjunto de dados representativo,

simulando adequadamente as análises realizadas. Foram realizadas, no total, 15000 simulações.

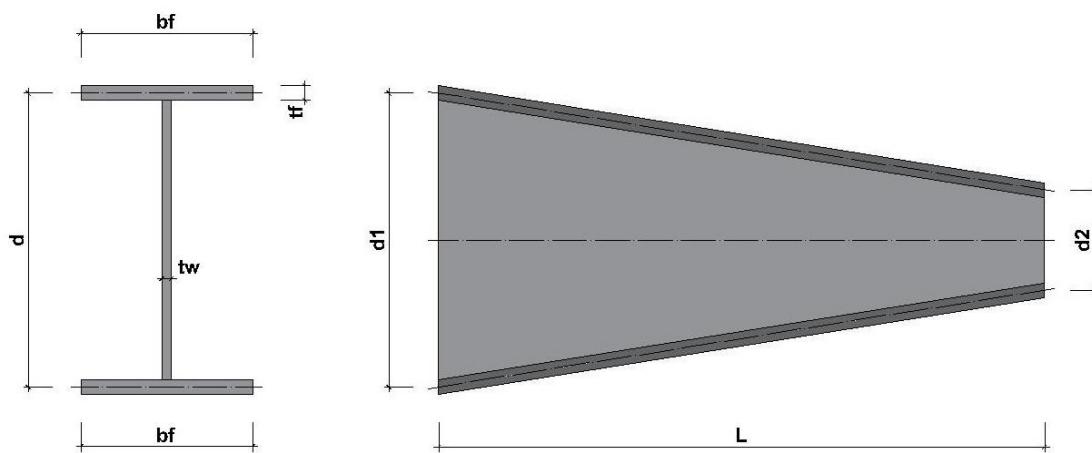
No que se refere aos tipos de elementos utilizados, o elemento SHELL181 é definido a partir das informações de uma seção do tipo casca e de quatro nós, possuindo seis graus de liberdade em cada um dos nós. Foi utilizado para constituir as superfícies das mesas e da alma do perfil modelado. Sua geometria é exibida na Figura 15.

Tabela 4 - Parâmetros geométricos para a modelagem dos perfis

Parâmetro	Coeficiente	Valores (intervalos) para k_n
$L = k_1 d_1$	k_1	(10,30)
$b_f = k_2 d_1$	k_2	(1/7,1)
$t_f = k_3 b_f$	k_3	(1/36,1/12)
$t_w = d_1/k_4$	k_4	(40, 260)
$d_2 = k_5 d_1$	k_5	(0,3; 1)

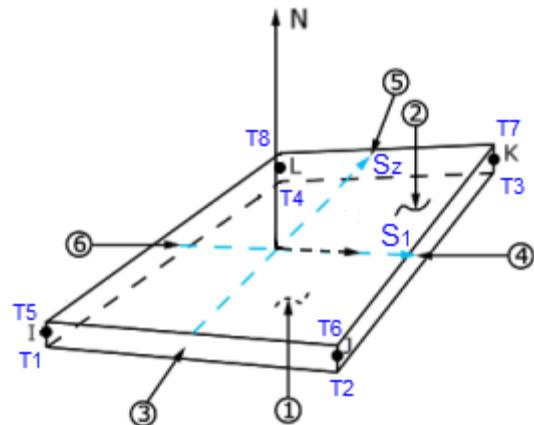
Fonte: Autora (2025).

Figura 14 - Geometria típica do modelo



Fonte: Autora (2025).

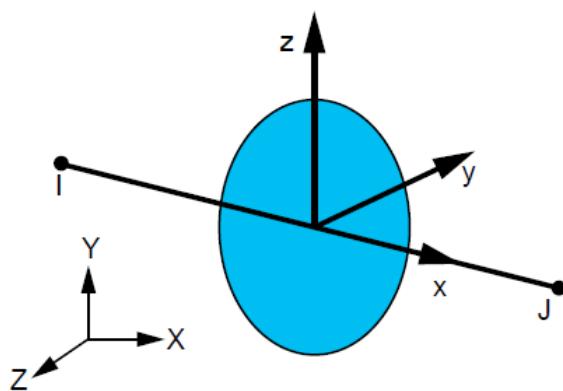
Figura 15 - Geometria do elemento SHELL181



Fonte: Ansys Inc.

O MPC184 constitui uma classe geral de elementos de restrição, a partir da qual aplicam-se restrições cinemáticas entre nós. Os elementos MPC184 do tipo *rigid beam* podem ser usados para modelar uma restrição rígida entre dois elementos deformáveis ou como um componente rígido para transmissão de esforços. É definido por dois nós (I, J) e assume-se que sua área da seção transversal é uma unidade. Sua geometria é exibida na Figura 16.

Figura 16 - Geometria do MPC184 *Rigid Link/Beam*



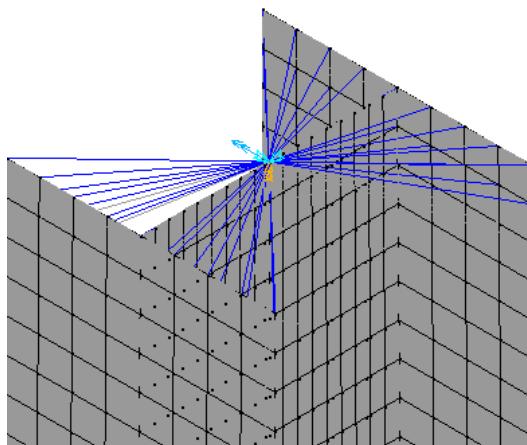
Fonte: Ansys Inc.

Neste trabalho, esses elementos foram utilizados para a aplicação das condições de contorno do modelo. Nas extremidades dos perfis, definiram-se *rigid beams* entre o nó central de cada uma das mesas e seus demais nós, bem como entre o nó central da alma e seus demais nós. Para simular o empenamento livre nos

vínculos de apoio, o nó localizado no centroide da seção transversal e os nós das mesas foram conectados com *rigid links*, em vez de *rigid beams*.

Na Figura 17, é possível observar o modelo construído, com seu carregamento e restrições de deslocamento e rotação aplicados ao nó central da seção transversal. Os elementos MPC184 (em azul) garantem um comportamento rígido entre o nó central e os demais nós da extremidade da barra, simulando uma condição em que a seção transversal trabalha de maneira conjunta. Ao utilizar o MPC184 do tipo *rigid links*, o nó central atua como uma rótula, permitindo o empenamento da seção.

Figura 17 - Modelo construído

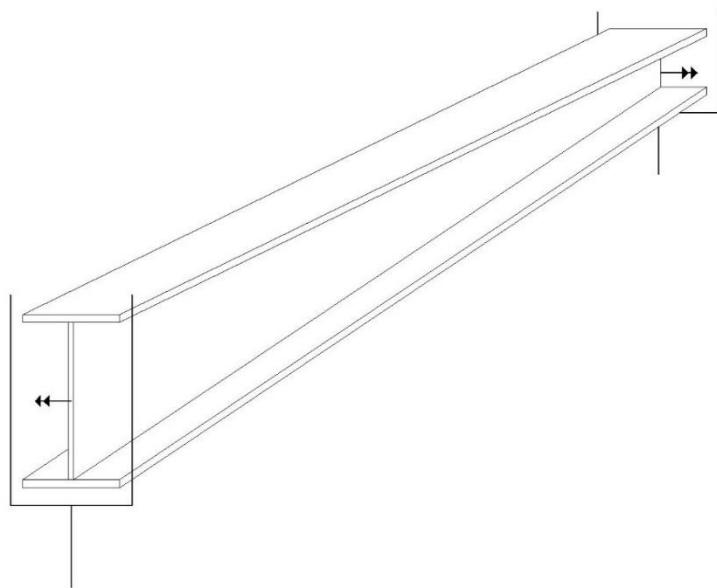


Fonte: Autora (2025).

Por se tratar de uma análise elástica de flambagem, no que se refere ao modelo constitutivo dos materiais, definiram-se somente módulo de elasticidade, igual a 200 GPa, e coeficiente de Poisson, igual a 0,3.

Para a aplicação das condições de contorno à estrutura, foram definidas opções de travamentos em relação aos deslocamentos nas direções x , y e z , em relação as rotações em torno de x , y e z , e em relação ao empenamento. Tais condições foram simuladas a partir da aplicação da restrição dos graus de liberdade dos nós localizados nos centroides das seções transversais das extremidades da barra. O modelo estudado foi uma barra birrotulada, com vínculos de garfo e atuação de momentos concentrados em suas duas extremidades (Figura 18). A utilização dos elementos MPC184 na extremidade facilita a imposição dessas condições de contorno em modelos com discretização em elementos de casca.

Figura 18 - Condições de contorno e carregamento do modelo estudado



Fonte: Autora (2025).

Com o objetivo de obter uma malha estruturada, padronizou-se a dimensão de cada elemento nas suas duas direções para todos os elementos de área da estrutura. Definiu-se o comprimento da lateral do elemento como sendo igual a $b_f / 8$, em que b_f é igual a largura da mesa do perfil. Esse valor foi selecionado para equilibrar desempenho computacional e precisão de resultados após alguns testes de malha.

4.1.1 Validação

Considerando a ausência de disponibilidade de soluções analíticas para o cálculo do momento crítico de perfis de inércia variável, razão pela qual esta pesquisa foi desenvolvida, a validação do modelo numérico ocorreu por meio de casos básicos de geometria e/ou condições de apoio e carregamento.

Inicialmente, foi simulado um pilar prismático de seção compacta, engastado-livre, submetido a uma força axial de compressão, por se tratar de um modelo simples de instabilidade e de rápida verificação. Os resultados (Tabela 5) foram comparados

com a força crítica de Euler, apresentando desvio de 1,05%, uma aproximação satisfatória.

Tabela 5 - Resultados da seção compacta sob compressão axial para a validação do modelo

Modelo	L (m)	d_1 (mm)	d_2 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	$N_{e, \text{numérico}}$ (kN)	$N_{e, \text{analítico}}$ (kN)	$\frac{N_{e, \text{numérico}}}{N_{e, \text{analítico}}}$
1	9,16	600	600	229	12,4	5,58	144,68	146,20	101,05%

Fonte: Autora (2025).

Com essas mesmas condições de apoio e carregamento, foi gerado um perfil de inércia variável de seção transversal aleatória. Avaliou-se o efeito da variação do seu comprimento total no valor da carga crítica, mantendo constante a razão de afilamento e a seção transversal da extremidade com altura igual a d_1 (variou-se também, consequentemente, d_2). O objetivo desta análise foi verificar se a variação das propriedades induzia uma variação compatível na resposta de força crítica. O aumento do comprimento total da barra provocou uma diminuição do valor da força crítica, conforme o esperado, já que o índice de esbeltez (para uma seção com $d = d_1$) aumentou. Além disso, nota-se que nos modelos em que o perfil sofreu FLA, a diminuição do valor da força crítica com o aumento do comprimento é ínfima, o que é coerente para esse modo de flambagem. Os resultados são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Resultados da variação do comprimento total de uma amostra para a validação do modelo

Modelo	L (m)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	d_1 (mm)	d_2 (mm)	P_{cr} (kN)	Modo de Flambagem
1	5	489	44,4	7,14	600	558	9206,79	FLA
2	6	489	44,4	7,14	600	549	9206,23	FLA
3	10	489	44,4	7,14	600	515	4197,12	Flexão em torno de y
4	12	489	44,4	7,14	600	499	2917,15	Flexão em torno de y

Fonte: Autora (2025).

Por fim, foi realizada uma simulação partindo de um perfil prismático e variando apenas a sua razão de afilamento. Como previsto, a força crítica diminuiu à medida

que a inclinação da barra aumentou. Essa variação da força crítica é pequena, uma vez que a flambagem ocorreu no eixo de menor inércia, e a altura do perfil não altera a rigidez à flexão nesse eixo de forma significativa. Os resultados são exibidos na Tabela 7.

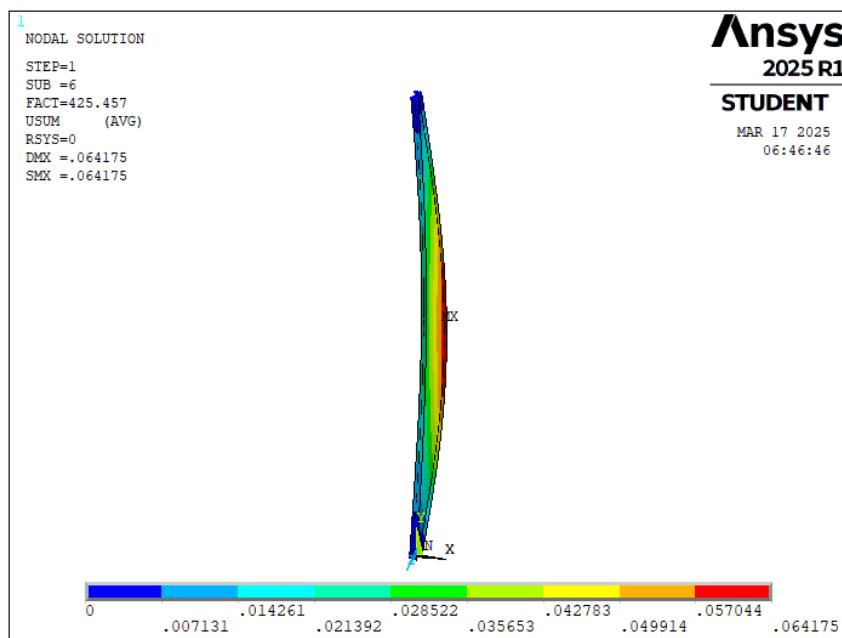
Tabela 7 - Resultados da variação da razão de afilamento de um perfil para a validação do modelo

Modelo	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	d_1 (mm)	d_2 (mm)	d_2/d_1	$P_{cr}(kN)$
1	229	12,4	5,58	600	600	1,00	144,68
2	229	12,4	5,58	600	540	0,90	144,68
3	229	12,4	5,58	600	420	0,70	144,65
4	229	12,4	5,58	600	300	0,50	144,60
5	229	12,4	5,58	600	240	0,40	144,56

Fonte: Autora (2025).

A Figura 19 exibe o modo de flambagem por FLT de um modelo representativo, típico para todos os modelos sujeitos a esse tipo de flambagem.

Figura 19 - Modo de flambagem típico para perfis sujeitos à FLT



Fonte: Autora (2025).

4.2 DEFINIÇÃO DOS MODELOS DE CLASSIFICAÇÃO KNN

Todos os códigos para a obtenção de um modelo para o cálculo do momento crítico de perfis da inércia variável foram desenvolvidos na plataforma do Jupyter Notebook, utilizando linguagem Python. Para a definição do modelo de classificação KNN, utilizou-se uma base de 954 dados rotulados, sendo 550 correspondentes à classe de FLA, 381 à classe de FLT e 23 à classe de FLM. As esbeltezes da alma, da mesa e a da verificação de FLT na maior seção transversal (considerando $d = d_1$) foram definidas como variáveis preditivas para o treinamento do modelo, já que essas grandezas estão diretamente relacionadas ao modo de flambagem do perfil. Foi incluída, também, a relação entre a maior e a menor altura da seção transversal dos modelos. Os classificadores foram desenvolvidos variando o número de vizinhos em 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. O conjunto de dados foi dividido de forma que 15% do total fosse destinado ao conjunto de testes. As entradas do modelo foram padronizadas com o *StandardScaler* da biblioteca *sci-kit learn*.

A precisão (Equação 53) e o *recall* (Equação 54) são métricas frequentemente usadas em problemas de classificação. Enquanto a precisão representa a acurácia das previsões positivas, o *recall* (também chamado de sensitividade) representa a razão de instâncias positivas identificadas corretamente pelo modelo. A pontuação F_1 , expressa na Equação 55, é uma média harmônica da precisão e do *recall*.

$$precisão = \frac{TP}{TP + FP} \quad (53)$$

$$recall = \frac{TP}{TP + FN} \quad (54)$$

$$F_1 = \frac{2}{\frac{1}{precisão} + \frac{1}{recall}} \quad (55)$$

Nas equações acima:

- TP é o número de verdadeiros positivos;
- FP é o número de falsos positivos;
- FN é o número de falsos negativos.

4.3 DEFINIÇÃO DA REDE NEURAL

A arquitetura da rede neural foi construída a partir da API Keras, escolhida devido à sua simplicidade e flexibilidade de utilização, além de conter uma ampla biblioteca de otimizadores, métricas, funções de custo e recursos de ajuste de hiperparâmetros. Utilizou-se o modelo disponível *Sequential*, que consiste em uma pilha linear de camadas.

O conjunto de dados foi dividido, de forma aleatória, em conjunto de treino e de teste, que correspondem a 80% e 20% dos dados, respectivamente. Separou-se, também de forma aleatória, o conjunto de teste em treino (75%) e validação (25%).

Implementou-se o otimizador Adam, com sua taxa de aprendizado padrão, de 0,001. De acordo com Kingma *et al.* (2014), esse algoritmo se apresenta adequado para problemas com um grande volume de dados e número de parâmetros, que é o caso da presente pesquisa.

Em razão dos dados dos momentos críticos dos modelos numéricos possuírem magnitudes muito diferentes, definiu-se o Erro Percentual Absoluto Médio (do inglês *Mean Absolute Percentage Error*, MAPE) como função de custo, já que ele expressa o erro relativo percentual entre as saídas previstas e esperadas. As métricas utilizadas foram o Erro Médio Absoluto (do inglês *Mean Absolute Error*, MAE), o Erro Quadrático Médio (do inglês *Mean Squared Error*, MSE) e o MAPE, expressas nas equações (56), (57) e (58).

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad (56)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (57)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{\hat{y}_t} \right| \quad (58)$$

em que y_i e \hat{y}_i são os valores previsto e esperado para a saída i , respectivamente.

Para a definição dos demais hiperparâmetros da rede neural, executou-se um ajuste de hiperparâmetros com um algoritmo de *Grid Search*. Estabeleceu-se, para tal, as seguintes variáveis preditoras: comprimento do perfil (L), largura das mesas (b_f), espessura das mesas (t_f), espessura da alma (t_w), maior altura do perfil (d_1), menor altura do perfil (d_2), esbeltez da mesa (r_1), esbeltez da alma (r_2), esbeltez para verificação à FLT (λ_{FLT}). Após a definição da melhor combinação de hiperparâmetros com essas variáveis, e consequentemente da melhor arquitetura da rede, foram explorados outros conjuntos de variáveis preditoras.

O ajuste de hiperparâmetros da rede foi realizado a partir da ferramenta *GridSearchCV* da *scikit-learn*, uma biblioteca de aprendizado de máquina. Os hiperparâmetros ajustados da rede foram o número de neurônios, número de camadas ocultas e função de ativação.

Na primeira busca pelo *GridSearch*, foram avaliados os seguintes conjuntos de hiperparâmetros, exibidos na Tabela 8, totalizando 36 combinações.

Como evidenciado na Tabela 9, as arquiteturas com a função de ativação ReLU apresentaram um *mean_test_score* médio superior às que utilizavam a função sigmoide, assim como as arquiteturas com 3 camadas ocultas em relação às de 2 camadas. Analisando os resultados obtidos para as dez arquiteturas com o melhor desempenho (Tabela 10), nota-se que, entre as duas melhores arquiteturas, o tempo médio para treino do modelo (*mean_fit_time*) varia de 101 para 122 segundos (aproximadamente), enquanto o *mean_test_score* não aumenta significativamente, indo de -0,04385 para -0,04132 (aproximadamente 5,78%). Dessa forma, escolher a arquitetura mais complexa, com 3 camadas de 100 neurônios cada, não justificaria o custo computacional adicional para a finalidade do modelo.

Tabela 8 - Hiperparâmetros avaliados no GridSearch

Hiperparâmetro	Conjunto avaliado
Número de camadas ocultas	2, 3
Número de neurônios	5, 6, 7, 10, 25, 50, 64, 83, 100
Função de ativação	ReLU, sigmoide

Fonte: Autora (2025).

Tabela 9 - Desempenho Médio das Redes Neurais por Função de Ativação e Número de Camadas

Nº de camadas ocultas	ReLU	Sigmoide	Total
2	-0,1634	-0,9680	-0,5656
3	-0,1236	-0,9677	-0,5456
Total	-0,1434	-0,9678	-0,5556

Fonte: Autora (2025).

Tabela 10 - Resultado do GridSearchCV

Tempo médio de treinamento (s)	Tempo médio para avaliação (s)	Função de ativação	Nº de camadas	Nº de neurônios por camada	Valor médio da métrica	Desvio padrão da métrica	Colocação
122	0,279	relu	3	100	-0,04132	0,0002934	1
101	0,282	relu	3	83	-0,04385	0,0007244	2
106	0,266	relu	3	64	-0,04529	0,001964	3
130	0,307	relu	3	50	-0,04898	0,001509	4
133	0,256	relu	2	100	-0,05024	0,001443	5
134	0,287	relu	2	83	-0,05865	0,001239	6
127	0,323	relu	2	64	-0,06435	0,005866	7
125	0,279	relu	3	25	-0,07699	0,01959	8
123	0,299	relu	2	50	-0,08663	0,01349	9
120	0,278	relu	2	25	-0,1697	0,01513	10

Fonte: Autora (2025).

A fim de confirmar esse comportamento para grupos de arquiteturas mais complexas, foi executada uma segunda *Grid Search*, mantendo a função de ativação ReLU e 3 camadas ocultas, mas variando o número de neurônios entre 60 e 200, com incremento de 10 neurônios. Observou-se que, a partir de 80 neurônios, o tempo médio para a previsão do modelo em cada conjunto de validação se estabilizou, sem impactar de forma relevante o valor médio da métrica de avaliação do modelo, tornando esse número satisfatório para os resultados desejados. Assim, definiu-se a arquitetura 83/83/83/1, com função de ativação ReLU, como padrão para as análises posteriores e desenvolvimento da rede neural final.

4.3.1 Variáveis preditivas

Após a definição da arquitetura, procedeu-se à análise de diferentes versões desta, alterando suas variáveis preditivas (Tabela 11). A Tabela 12 exibe as variáveis selecionadas para cada uma dessas versões. Na definição das variáveis preditivas, a versão inicial tem somente os parâmetros geométricos que são utilizados no desenvolvimento do modelo numérico. Posteriormente, avalia-se na segunda versão uma troca por somente os valores de esbeltez, acompanhados das alturas da seção nas duas extremidades (que permitem diferenciar perfis com diferentes razões de afilamento). Em seguida, todos esses parâmetros (esbeltezes e parâmetros geométricos) são considerados como variáveis preditivas na terceira versão. Finalmente, na quarta versão, além dos parâmetros da versão 3, são adicionados os momentos de inércia do perfil em relação ao eixo x.

Tabela 11 - Resumo das Variáveis Preditivas Analisadas

Variável preditiva	Simbologia
Comprimento do perfil	L
Largura das mesas	b_f
Espessura das mesas	t_f
Espessura da alma	t_w
Altura da maior seção transversal	d_1
Altura da menor seção transversal	d_2
Ebeltez das mesas (b_f / t_f)	r_1
Ebeltez da alma na maior seção transversal (d_1 / t_w)	r_2
Ebeltez para verificação à FLT na menor seção transversal (L/r_y)	λ_{FLT}
Momento de inércia em relação a x da menor seção transversal	$I_{x,min}$
Momento de inércia em relação a x da maior seção transversal	$I_{x,max}$

Fonte: Autora (2025).

Tabela 12 - Variáveis preditivas de cada versão da arquitetura 83/83/83/1

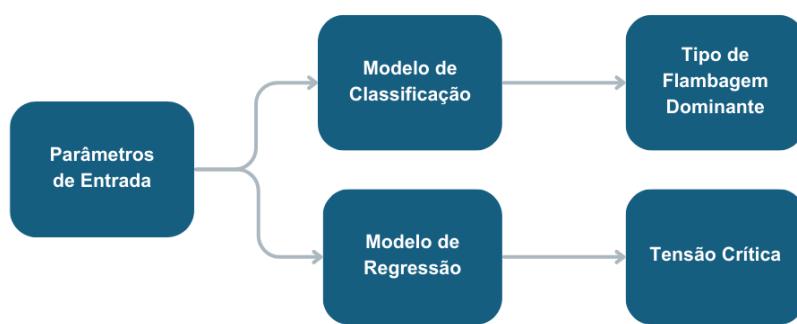
Versão	Variáveis preditivas
1 ^a	$L, b_f, t_f, t_w, d_1, d_2$
2 ^a	$r_1, r_2, \lambda_{FLT}, d_1, d_2$
3 ^a	$L, b_f, t_f, t_w, d_1, d_2, r_1, r_2, \lambda_{FLT}$
4 ^a	$L, b_f, t_f, t_w, d_1, d_2, r_1, r_2, \lambda_{FLT}, I_{x,min}, I_{x,max}$

Fonte: Autora (2025).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, são exibidos os resultados para os modelos de classificação e regressão desenvolvidos a partir de algoritmos de *machine learning*. A Figura 12 mostra o fluxo de dados nesses modelos.

Figura 20 - Fluxo de dados nos modelos de classificação e regressão

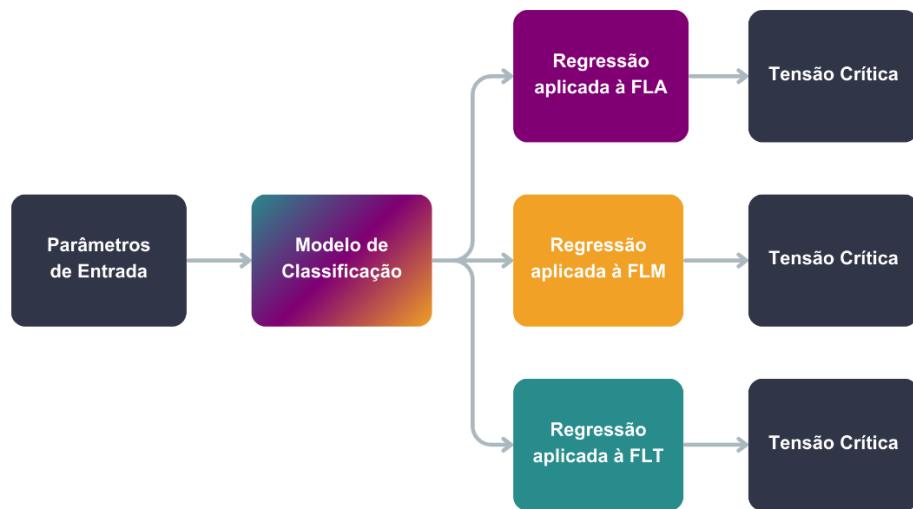


Fonte: Autora (2025).

Inicialmente, são expostos os indicadores para construção de um classificador KNN que retorna um dos seguintes modos de flambagem de um perfil de inércia variável: FLA, FLM e FLT. Após a definição do classificador com o melhor desempenho, este foi implementado ao conjunto de dados iniciais para a previsão dos dados inicialmente não rotulados. Assim, obteve-se um conjunto de 15000 amostras com uma classe (rótulo) associada a elas.

Em seguida, prosseguiu-se com o treinamento de dois tipos de algoritmos de regressão: uma regressão convencional, sem considerar a classe dos perfis, e uma regressão aplicada a cada classe definida anteriormente. Os resultados das regressões aplicadas às classes foram compilados para um algoritmo que recebe as variáveis de entrada, classifica a instância e realiza a previsão a partir da regressão referente à sua categoria. Seu fluxo de dados é exibido na Figura 21. Por fim, comparou-se o desempenho de todos os modelos citados. O modelo de melhor desempenho (recomendado) foi tomado como referência para gerar exemplos de aplicação.

Figura 21 - Fluxo de dados do modelo de regressão associado ao de classificação



Fonte: Autora (2025).

5.1 DESEMPENHO DOS MODELOS DE CLASSIFICAÇÃO

A Tabela 13 e a Tabela 14 exibem o desempenho por classe e médio, respectivamente, dos modelos de classificação com KNN para diferentes números de vizinhos. Nota-se que os classificadores com um número de vizinhos igual a 4 e 6 apresentaram resultados mais consistentes, já que possuem maior acurácia e maiores médias macro e ponderada das demais métricas de avaliação do modelo em relação aos classificadores restantes. Optou-se por prosseguir com o modelo com 4 vizinhos para o treinamento dos novos modelos de regressão, dado que este tem uma precisão mais alta para a FLA, classe mais expressiva no conjunto total de dados. Além disso, avaliaram-se 4 vizinhos como um número mais razoável para a classificação dos dados, tendo em vista que há um desbalanceamento no número de amostras de cada classe com poucas instâncias para a classe FLM, em comparação às demais.

Tabela 13 - Desempenho dos modelos de classificação com KNN

Nº de vizinhos	Acurácia	Classe	Precisão	Recall	Pontuação F1
1	0,92	FLA	0,97	0,92	0,95
		FLM	1,00	0,67	0,80
		FLT	0,85	0,94	0,89
2	0,92	FLA	0,97	0,92	0,95
		FLM	1,00	0,67	0,80
		FLT	0,85	0,94	0,89
3	0,93	FLA	0,97	0,92	0,95
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,87	0,94	0,90
4	0,94	FLA	0,98	0,94	0,96
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,88	0,96	0,92
5	0,93	FLA	0,97	0,92	0,95
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,87	0,94	0,90
6	0,94	FLA	0,97	0,95	0,96
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,90	0,94	0,92
7	0,94	FLA	0,97	0,94	0,95
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,88	0,94	0,91

Fonte: Autora (2025).

Tabela 14 - Desempenho médio dos modelos de classificação por número de vizinhos

Nº de vizinhos	Métrica	Precisão	Recall	Pontuação F1
1	Média macro	0,94	0,84	0,88
	Média ponderada	0,93	0,92	0,92
2	Média macro	0,94	0,84	0,88
	Média ponderada	0,93	0,92	0,92
3	Média macro	0,94	0,95	0,95
	Média ponderada	0,93	0,93	0,93
4	Média macro	0,95	0,96	0,96
	Média ponderada	0,95	0,94	0,94
5	Média macro	0,94	0,95	0,95
	Média ponderada	0,93	0,93	0,93
6	Média macro	0,96	0,96	0,96
	Média ponderada	0,95	0,94	0,94
7	Média macro	0,95	0,96	0,95
	Média ponderada	0,94	0,94	0,94

Fonte: Autora (2025).

Os modelos de classificação testados foram construídos a partir de uma função de pesos ponderada para o cálculo da distância entre os k vizinhos do algoritmo, utilizando o inverso da distância como peso. Após a definição do classificador com $k = 4$ como base para as regressões, foram comparados dois modelos desse classificador, variando o cálculo da distância mencionada em uniforme (sem pesos) e ponderada (forma utilizada para os testes anteriores). Os resultados estão dispostos na Tabela 15. O classificador com a função de pesos estabelecida pelo inverso da distância entre os vizinhos obteve uma melhor média de avaliação em todas as métricas consideradas, sendo escolhido como o classificador definitivo para utilização.

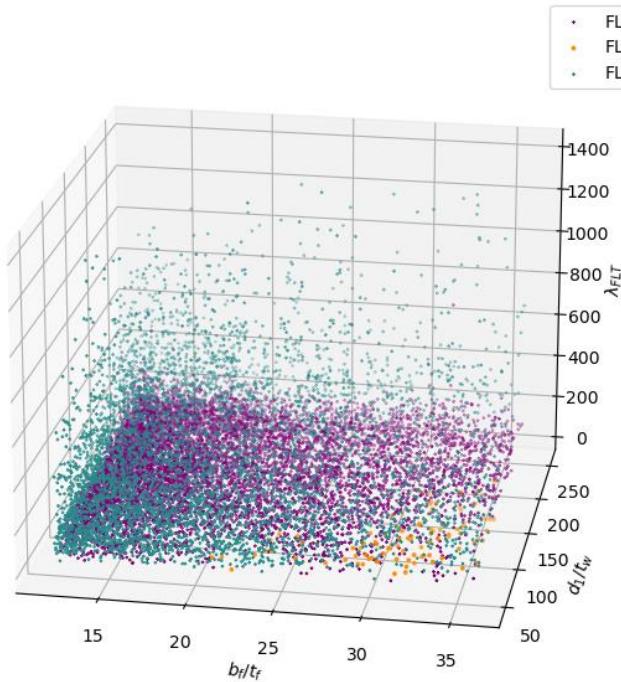
Tabela 15 - Comparativo entre diferentes funções de peso para o classificador com
 $k = 4$

Função de pesos	Acurácia	Classe	Precisão	Recall	Pontuação F1
Inverso da distância	0,93	FLA	0,98	0,94	0,96
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,88	0,96	0,92
		Média macro	0,95	0,96	0,96
	Média ponderada		0,95	0,94	0,94
Uniforme	0,93	FLA	0,94	0,96	0,95
		FLM	1,00	1,00	1,00
		FLT	0,91	0,88	0,89
		Média macro	0,95	0,94	0,95
	Média ponderada		0,93	0,93	0,93

Fonte: Autora (2025).

A partir do modelo de classificação definido anteriormente, foram atribuídas classes aos dados não rotulados pertencentes às 15000 amostras de dados iniciais, gerando uma base de dados atualizada para novos modelos de regressão. A Figura 22 exibe o gráfico de dispersão 3D com os resultados do classificador de melhor performance aplicado a esses dados não rotulados. É possível observar uma delimitação razoável entre os espaços definidos para cada categoria.

Figura 22 - Gráfico de dispersão 3D com classes previstas



Fonte: Autora (2025).

5.2 DESEMPENHO DAS REDES NEURAIS

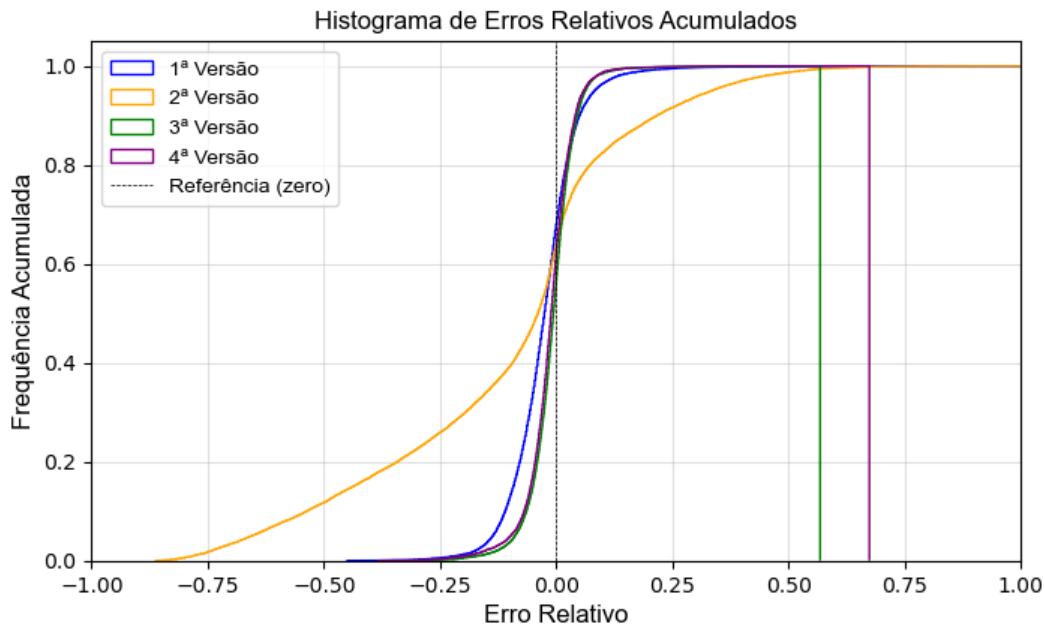
Após realizados os treinamentos das redes neurais com os quatro conjuntos de variáveis preditivas, os valores de métricas de desempenho são apresentados na Tabela 16. Além disso, a Figura 23 e a Tabela 17 apresentam avaliações dos erros (medidos como a diferença relativa entre o valor previsto e o valor numérico de tensão crítica) obtidos com o uso dos modelos de redes neurais.

Tabela 16 - Desempenho das 4 versões da arquitetura 83/83/83/1

Versão	Métricas para o conjunto de validação		
	MAE	MSE	MAPE
1 ^a	9,467E+03	7,166E+08	5,888E+00
2 ^a	2,596E+04	2,810E+09	2,174E+01
3 ^a	6,597E+03	3,599E+08	3,882E+00
4 ^a	7,346E+03	5,146E+08	4,163E+00

Fonte: Autora (2025).

Figura 23 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para as 4 Versões da Rede



Fonte: Autora (2025).

Observa-se que, dentre os modelos analisados, o da versão 3 foi o que teve melhor resultado. Nesse modelo, o erro médio foi de -0,789% e o erro absoluto médio foi de 3,61%. O desvio padrão do erro foi de 5,12%. Essas constatações também podem ser extraídas da Figura 23, na qual se observa uma curva mais vertical e próxima de zero para o modelo 3.

Tabela 17 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para as 4 versões da arquitetura 83/83/83/1

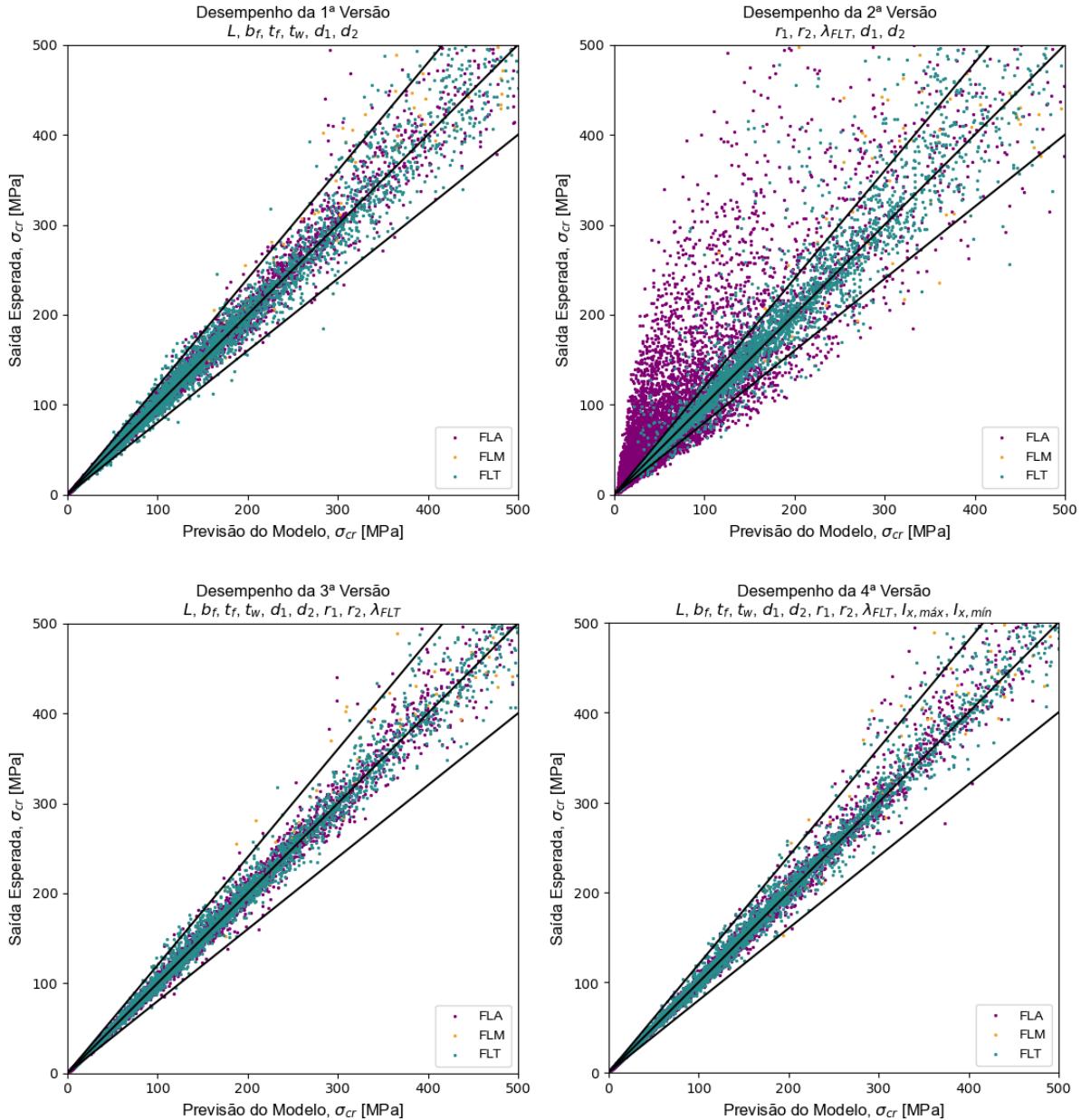
Parâmetro estatístico	Modelo de regressão			
	1ª Versão	2ª Versão	3ª Versão	4ª Versão
Máximo	1,218	1,094	0,5675	0,6735
Mínimo	-0,4516	-0,8633	-0,3221	-0,3843
Média	-0,02526	-0,1043	-0,007885	-0,01328
Média do erro relativo absoluto	0,05681	0,2138	0,03608	0,03798
Desvio padrão	0,07478	0,2821	0,05122	0,05388
Q1 - 25%	-0,06588	-0,2623	-0,03278	-0,03733
Q2 - 50%	-0,02440	-0,03841	-0,005497	-0,01063
Q3 - 75%	0,01247	0,03862	0,01924	0,01505

Fonte: Autora (2025).

Comparando o desempenho da 3^a versão com a 4^a, foi identificado um leve declínio na performance desta última, com a inclusão dos momentos de inércia em relação ao eixo x como variáveis de entrada. Ao mesmo tempo, a ausência dos parâmetros de esbeltez como variáveis de entrada (caso da 1^a versão) proporcionou resultados mais imprecisos, contudo, mais conservadores, se comparado com a 3^a versão. Essa condição fica evidente com o deslocamento da curva do histograma acumulado para a esquerda. A 2^a versão, que não inclui as variáveis L , b_f , t_f e t_w , apresentou o pior desempenho entre todas as versões analisadas, com erros mais dispersos, indicando variabilidade do modelo. Esses resultados reforçam a necessidade de uma boa definição das variáveis preditivas, com conhecimento dos fenômenos que governam a análise realizada.

Esses resultados são reafirmados pela Figura 24, que exibe os gráficos de dispersão entre valores reais e preditos para as versões analisadas da arquitetura, em que as classes de cada instância estão identificadas pela cor do marcador. As retas representam o comportamento ideal (reta central) e um desvio entre os valores de 20%. De forma geral, todos os modelos apresentaram uma tendência a prever tensões críticas inferiores às tensões obtidas do modelo de elementos finitos, o que representa um resultado conservador. A 3^a versão, com o melhor desempenho, contém pontos mais próximos do comportamento ideal e dentro do intervalo especificado. Cabe ressaltar que a segunda versão leva a uma previsão particularmente ruim nos casos de FLA, o que se evidencia da maior dispersão dos pontos em roxo nesta figura. Nos outros modelos, ao menos graficamente, não parece haver diferença significativa entre a qualidade das previsões com a variação do modo de flambagem.

Figura 24 - Dispersão entre Valores Reais e Preditos para as 4 Versões da Rede



Fonte: Autora (2025).

A 3^a e 4^a versões da rede neural, que apresentaram as melhores estimativas da tensão crítica, foram treinadas novamente, alterando a variável de saída da tensão crítica para o momento crítico de flambagem. A Figura 25 e a Figura 26 exibem um comparativo de cada uma dessas versões, avaliando a influência da variável de resposta no histograma de erros relativos. Os modelos com a previsão do momento crítico resultaram em valores menos dispersos e mais próximos do comportamento ideal, melhorando ligeiramente o desempenho da rede. Esses resultados são ratificados pela Tabela 18, onde verificam-se menores erros para esses modelos. Não

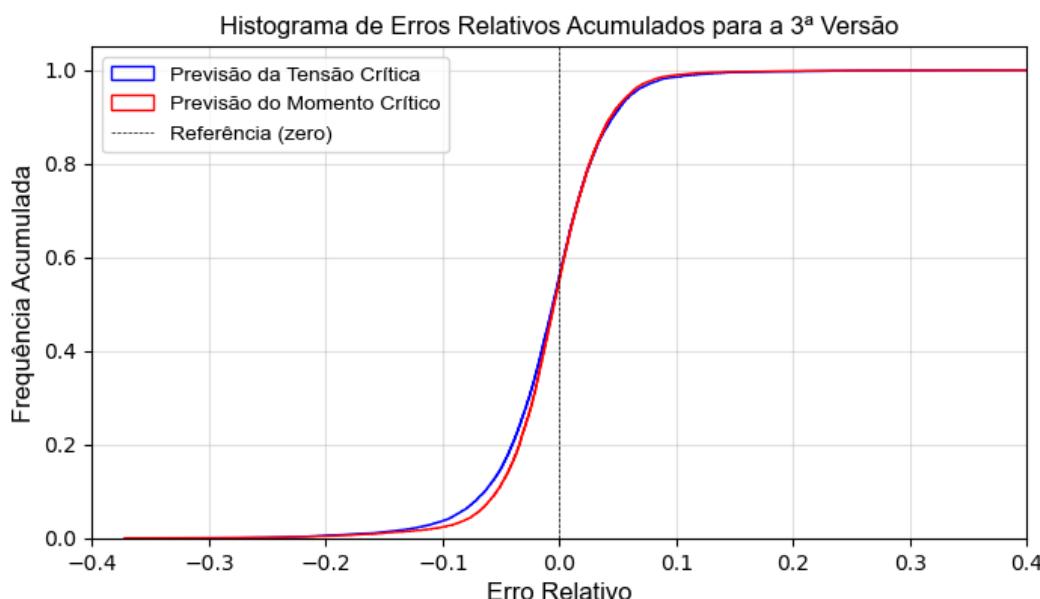
parece haver um motivo evidente para que o desempenho do modelo com a saída com momento crítico seja melhor que a com tensão crítica. Considerando-se que as diferenças são relativamente pequenas e que os modelos foram treinados somente para algumas alturas de perfis (podendo apresentar erros maiores ao se utilizarem alturas novas), recomenda-se a utilização do modelo baseado em tensões, que não depende da dimensão absoluta da viga. A 3^a versão da arquitetura 83/83/83/1, com a previsão da tensão crítica, é, então, tomada como referência para o modelo de regressão original (convencional, sem a classificação prévia dos perfis), sendo considerada nas análises comparativas com as regressões aplicadas a cada classe.

Tabela 18 - Desempenho da 3^a e 4^a Versões da Arquitetura 83/83/83/1 - Previsão da Tensão Crítica x Momento Crítico

Versão	Variável de saída	Métricas do conjunto de validação		
		MAE	MSE	MAPE
3 ^a	σ_{cr}	6,597E+03	3,599E+08	3,882E+00
3 ^a	M_{cr}	7,150E+01	2,199E+05	3,754E+00
4 ^a	σ_{cr}	7,346E+03	5,146E+08	4,163E+00
4 ^a	M_{cr}	6,587E+01	1,664E+05	3,784E+00

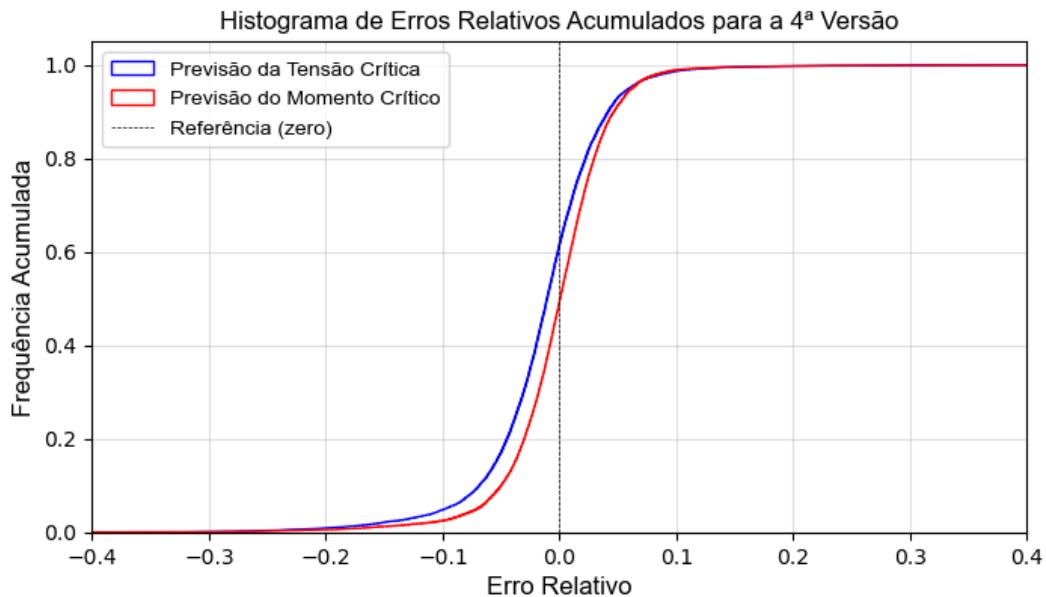
Fonte: Autora (2025).

Figura 25 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para a 3^a Versão da Arquitetura: Previsão do Momento Crítico x Tensão Crítica



Fonte: Autora (2025).

Figura 26 - Histograma de Erros Relativos Acumulados para a 4^a Versão da Arquitetura: Previsão do Momento Crítico x Tensão Crítica



Fonte: Autora (2025).

5.3 EFEITO DA CLASSIFICAÇÃO DOS DADOS NOS MODELOS DE REGRESSÃO

Após a implementação do classificador nos dados não rotulados do conjunto inicial, obteve-se uma base de dados com grupos de 9119, 117 e 5764 amostras classificadas como FLA, FLM e FLT, respectivamente.

Com o objetivo de avaliar o efeito da classificação dos dados no desempenho dos modelos de regressão, foram treinados novos modelos, tomando como base as variáveis preditivas da 3^a versão da arquitetura de rede, definida em 4.3.1. Para a classe de FLM, foi necessário alterar o número de neurônios para 10 por camada, em razão de essa classe possuir um número muito menor de instâncias disponíveis para treinamento. Sua arquitetura, portanto, deve ser menos complexa.

O aprendizado foi aplicado a cada classe e os resultados do treinamento foram compilados em um algoritmo que, a partir dos dados de entrada, classifica uma instância e aplica a ela o modelo de regressão associado à sua classe. A Tabela 19 exibe o desempenho dos modelos de regressão referência e por classe.

Tabela 19 - Desempenho dos modelos de regressão de referência e aplicados a cada classe

Modelo de Regressão	Variável de Saída	MAE	MSE	MAPE
Convencional	σ_{cr}	6,597E+03	3,599E+08	3,882E+00
Convencional	M_{cr}	7,150E+01	2,199E+05	3,754E+00
Aplicado à FLA	σ_{cr}	1,164E+04	1,500E+09	6,988E+00
Aplicado à FLA	M_{cr}	7,190E+01	4,365E+05	3,534E+00
Aplicado à FLM	σ_{cr}	5,682E+04	5,170E+09	1,390E+01
Aplicado à FLM	M_{cr}	1,106E+03	7,257E+06	2,860E+01
Aplicado à FLT	σ_{cr}	2,297E+04	4,118E+09	8,402E+00
Aplicado à FLT	M_{cr}	1,261E+02	6,154E+05	4,324E+00

Fonte: Autora (2025).

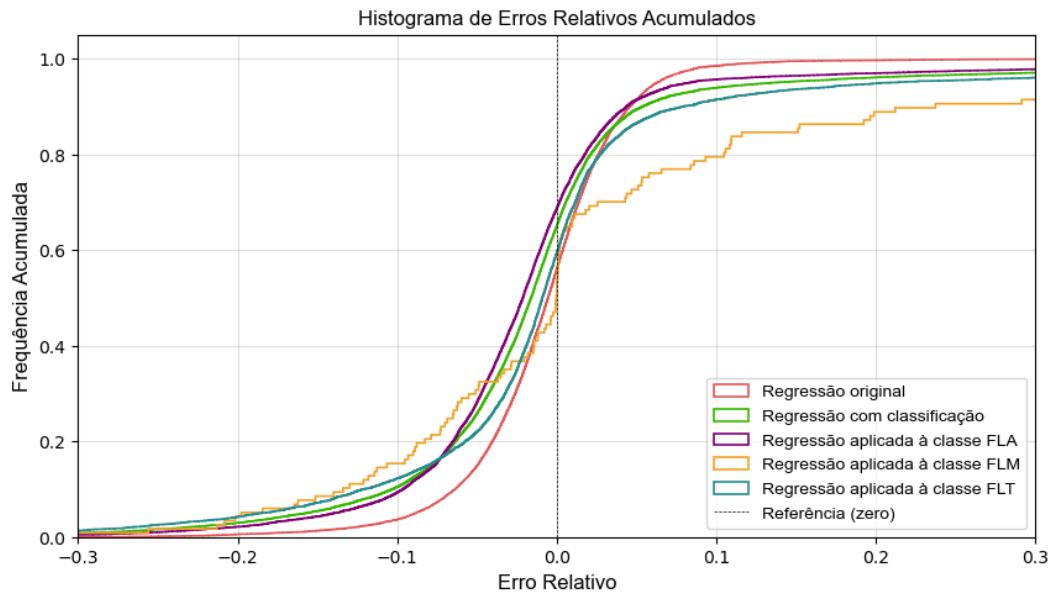
Em geral, com exceção à FLM, os modelos aplicados às classes seguiram a tendência observada nas regressões anteriores, em que as redes com saída igual ao momento crítico apresentaram desempenho superior àquelas com a tensão crítica como saída. O modelo treinado com a classe FLA foi o único que apresentou um desempenho superior após a classificação. A Tabela 20 e a Figura 27 exibem, respectivamente, as medidas estatísticas e o histograma para os erros acumulados das regressões original, com classificação e aplicadas a cada classe de flambagem.

Tabela 20 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para a regressão convencional e classificada

Parâmetro estatístico	Convencional	Modelo de regressão			
		Com classificação	Aplicada à FLA	Aplicada à FLM	Aplicada à FLT
Máximo	0,5675	5,666	5,666	1,676	3,383
Mínimo	-0,3221	-0,5535	-0,4974	-0,3794	-0,5535
Média	-0,007885	-0,001044	-0,009304	0,04572	0,01108
Média do erro relativo absoluto	0,03608	0,07500	0,06731	0,1278	0,08609
Desvio padrão	0,05123	0,1915	0,1747	0,2588	0,2133
Q1 - 25%	-0,03278	-0,05148	-0,05514	-0,06495	-0,04211
Q2 - 50%	-0,005497	-0,01595	-0,02108	-0,0002866	-0,009028
Q3 - 75%	0,01924	0,01295	0,008863	0,053377	0,01772

Fonte: Autora (2025).

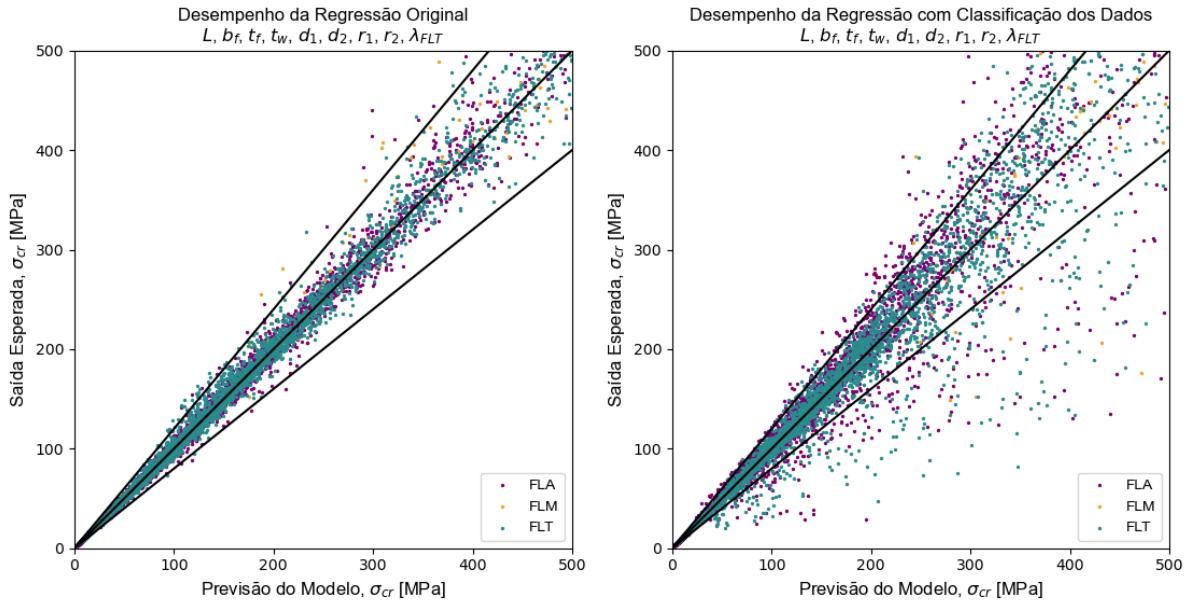
Figura 27 - Histograma de Erros Relativos Acumulados: Regressão original x Regressão com classificação



Fonte: Autora (2025).

A regressão pré-classificada possui valores de erro relativo máximo e mínimo mais extremos em relação à regressão convencional, revelando um desempenho inferior. Isso pode estar associado ao menor tamanho do conjunto de dados de treinamento para esses modelos. Também há de se ressaltar que o ajuste de hiperparâmetros foi feito somente para o modelo com a regressão convencional, podendo impactar nos resultados. A média dos erros relativos absolutos e o desvio padrão da regressão convencional são menores, evidenciando a maior precisão do modelo. A Figura 28 exibe o gráfico de dispersão entre valores esperados e preditos para os dois modelos de regressão. Nota-se um maior número de pontos fora da margem de 20% no modelo de regressão com classificação, inclusive na região contra a segurança, principalmente para a classe de FLT.

Figura 28 - Dispersão entre Valores Reais e Preditos: Regressão Original x Regressão com Classificação



Fonte: Autora (2025).

5.4 COMPARAÇÃO DOS MODELOS COM FORMULAÇÕES DA LITERATURA

Na presente seção, são comparados os valores obtidos de previsão de momento crítico de FLT com os valores indicados na literatura por Braham e Hanikenne (1993). Tendo em vista que este é o modo de flambagem que deve guardar as maiores diferenças com relação aos perfis prismáticos, somente este fenômeno foi avaliado.

Os parâmetros estatísticos dos erros relativos e o histograma da sua distribuição acumulada estão exibidos na Tabela 21 e na Figura 29, respectivamente. O gráfico de dispersão entre valores reais e valores preditos pelo modelo e pela formulação é mostrado na Figura 30. Observaram-se erros consideravelmente menores para o modelo de regressão a partir de redes neurais, o que evidencia a maior capacidade de previsão desses algoritmos em relação a formulações mais simples da literatura. A partir da visualização dos pontos do gráfico de dispersão, nota-se que os resultados obtidos com a formulação de Braham e Hanikenne (1993) têm

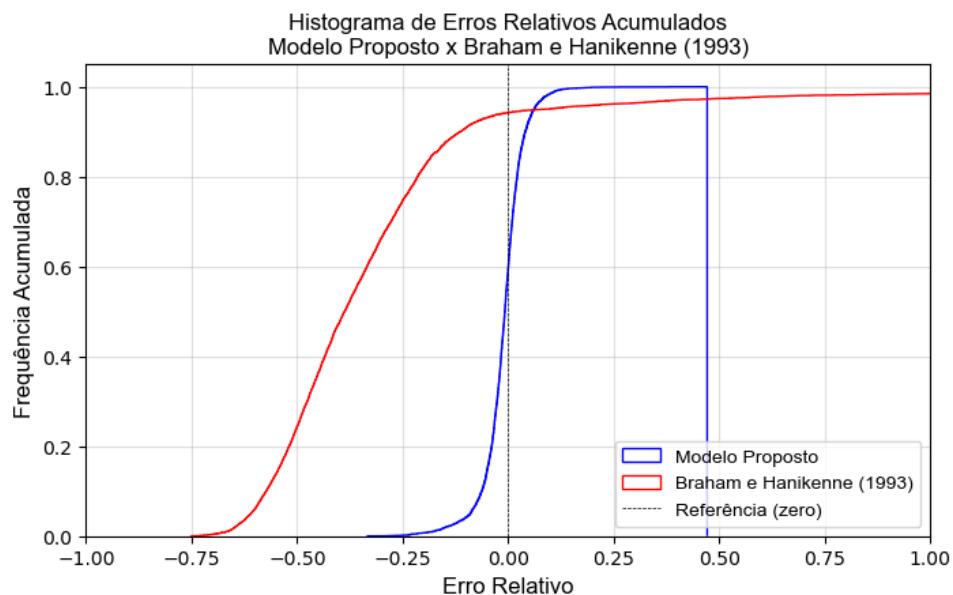
uma tendência mais conservadora. Em parte, esse conservadorismo pode ser devido à desconsideração da rigidez à torção da seção transversal nesta formulação.

Tabela 21 - Resultados do erro relativo entre valor previsto e valor esperado para o modelo proposto e a formulação de Braham e Hanikenne (1993)

Parâmetro estatístico	Modelo	
	Regressão proposta	Formulação de Braham e Hanikenne (1993)
Máximo	0,471095	7,133514
Mínimo	-0,334927	-0,752085
Média	-0,010834	0,317570
Média do erro relativo absoluto	0,03513	0,4099
Desvio padrão	0,050625	0,396109
Q1 - 25%	-0,032567	-0,495990
Q2 - 50%	-0,007906	-0,386779
Q3 - 75%	0,014613	-0,247359

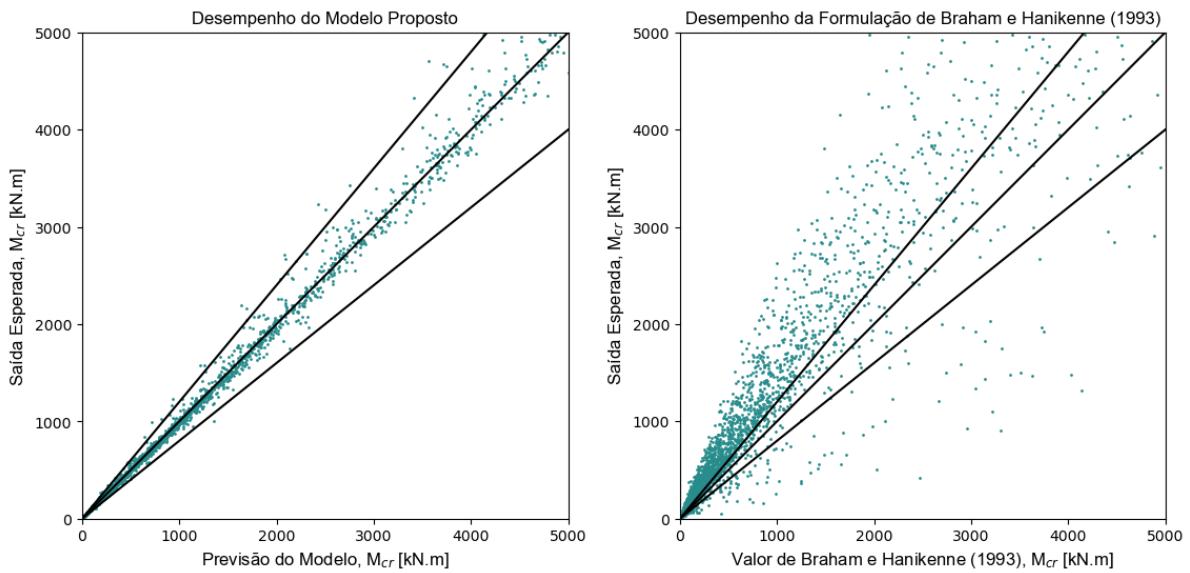
Fonte: Autora (2025).

Figura 29 - Histograma de Erros Relativos Acumulados: Modelo Proposto x Braham e Hanikenne (1993)



Fonte: Autora (2025).

Figura 30 - Comparação entre os resultados do modelo de regressão proposto e a formulação de Braham e Hanikenne (1993)



Fonte: Autora (2025).

5.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Com o intuito de demonstrar a aplicação do modelo proposto e comparar os resultados obtidos com os resultados numéricos (tomados como referência), foram produzidos 20 exemplos de aplicação, com 5 exemplos para cada altura d_1 da seção. A Tabela 22 exibe os modelos considerados para exemplificação, com seus parâmetros geométricos, valores da tensão crítica obtida numericamente (σ_{num}), valores da tensão crítica obtida segundo o modelo de *machine learning* (σ_{mod}), modos de flambagem dos modelos obtidos numericamente (MF_{num}) e categorias previstas dos modos de flambagem (MF_{modelo}). Dos modelos selecionados, três apresentaram erro de classificação e os desvios máximos (em módulo) de previsão de tensão crítica foram de -12% e +19%.

Tabela 22 - Exemplos de aplicação do modelo recomendado

Ex.	<i>L</i> (m)	<i>b_f</i> (mm)	<i>t_f</i> (mm)	<i>t_w</i> (mm)	<i>d₁</i> (mm)	<i>d₂</i> (mm)	σ_{num} (MPa)	σ_{mod} (MPa)	$\frac{\sigma_{mod}}{\sigma_{num}}$	<i>MF_{num}</i>	<i>MF_{mod}</i>
1	8,45	274	12,6	2,17	300	195	43,5	43,5	1,0003	FLA	FLA
2	6,41	261	14,6	3,40	300	272	114	107	0,9335	FLA	FLA
3	8,03	129	10,4	1,42	300	239	35,4	39,6	1,1178	FLA	FLA
4	8,85	79,6	5,86	1,38	300	276	26,3	25,8	0,9807	FLT	FLT
5	6,09	245	6,81	5,25	300	139	446	465	1,0418	FLT	FLM
6	17,0	455	17,7	10,4	600	568	148	153	1,0370	FLT	FLT
7	10,7	503	18,1	3,56	600	351	46,3	42,8	0,9240	FLA	FLA
8	7,80	587	17,0	7,75	600	525	225	218	0,9703	FLA	FLA
9	17,3	211	14,3	3,40	600	355	66,2	64,6	0,9753	FLT	FLT
10	6,55	576	17,6	7,53	600	203	471	467	0,9908	FLM	FLM
11	13,8	136	8,62	5,85	900	297	58,0	59,6	1,0267	FLT	FLT
12	15,9	679	54,7	11,8	900	738	176	185	1,0554	FLA	FLA
13	11,1	512	38,3	18,1	900	828	387	381	0,9838	FLT	FLT
14	20,8	462	15,3	7,91	900	286	294	260	0,8814	FLT	FLT
15	16,3	812	28,5	15,8	900	326	673	807	1,1996	FLM	FLM
16	21,8	939	73,7	6,30	1200	456	26,4	27,1	1,0298	FLA	FLA
17	28,3	636	51,5	5,27	1200	538	33,5	32,3	0,9664	FLA	FLA
18	12,5	504	20,6	9,28	1200	417	503	528	1,0499	FLT	FLA
19	24,3	448	22,3	14,6	1200	937	80,9	80,6	0,9959	FLT	FLT
20	24,5	1160	36,5	13,6	1200	521	311	301	0,9671	FLA	FLM

Fonte: Autora (2025).

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposto um modelo de regressão para a determinação da do momento e da tensão crítica de flambagem de perfis de inércia variável submetidos à flexão. Foi obtida uma base de dados de 15000 modelos numéricos desses perfis por meio do Ansys. A partir de um ajuste fino de hiperparâmetros, definiu-se uma arquitetura para o modelo com três camadas intermediárias de 83 neurônios, 83/83/83/1. Foram avaliadas 4 versões dessa arquitetura, alterando suas variáveis de entrada. Concluiu-se que o modelo que apresenta simultaneamente parâmetros geométricos ($L, b_f, t_f, t_w, d_1, d_2$) da seção transversal e parâmetros de esbeltez (r_1, r_2, λ_{FLT}) obteve o melhor desempenho entre as versões. Não foi observada uma diferença significativa nos modelos com a inclusão dos momentos de inércia em relação a x como parâmetros de entrada. Fazendo um comparativo entre a previsão do momento crítico e da tensão crítica de flambagem para as melhores versões, os modelos com saída igual a momento crítico apresentaram métricas de erro ligeiramente menores. Apesar disso, recomenda-se a utilização do modelo baseado em tensões, já que este não depende da dimensão absoluta da viga, diminuindo a ocorrência de erros em caso da aplicação do modelo para alturas da seção transversal diferentes das consideradas no treinamento.

No intuito de avaliar a influência da classificação dos dados no desempenho da regressão, foi construído um modelo de classificação KNN que classifica os perfis de acordo com seu modo de flambagem: FLA, FLM e FLT. Após a classificação da base de dados completa, foram treinados algoritmos de regressão para cada uma das classes. Os resultados do treinamento foram compilados para a obtenção de um modelo que recebe as variáveis de entrada, classifica o perfil e aplica a regressão de acordo com sua classe. Comparando o desempenho dessa regressão pré-classificada com a regressão original, observou-se uma diminuição na performance do modelo com a classificação dos dados.

Os modelos baseados em aprendizado de máquina mostraram-se, de modo geral, como uma maneira eficiente de calcular a tensão crítica de flambagem, com erro médio absoluto da ordem de 3% e desvio padrão de 5%. Isso demonstra a

eficiência deste tipo de algoritmo no desenvolvimento de modelos de regressão complexos e com erro relativamente baixo.

Avaliando as diferenças entre o modelo obtido e a formulação de Braham e Hanikenne (1993), verificou-se uma melhora considerável na previsão do momento crítico pelo modelo proposto em relação à formulação da literatura. Os valores obtidos para Braham e Hanikenne (1993) mostraram-se mais conservadores, subestimando a capacidade de resistência desses perfis. Recomenda-se, assim, a utilização do modelo proposto para a previsão do momento crítico dos perfis de inércia variável.

Por fim, são propostas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Realizar estudos mais refinados em relação ao ajuste de hiperparâmetros da rede, para diferentes taxas de aprendizado e otimizadores;
- Explorar outras técnicas de *machine learning* para o desenvolvimento dos modelos de classificação e regressão;
- Ampliar o estudo dos perfis de inércia variável para outros casos de carregamento, condições de apoio e geometria;
- Expandir o volume de dados gerando mais modelos numéricos, a fim de contemplar outros modos de flambagem e melhorar o desempenho das regressões aplicadas à FLM, especificamente;
- Estender o comparativo dos modelos com formulações da literatura para os casos de FLA e FLM.

Além disso, como um principal desdobramento deste trabalho, considera-se uma importante sugestão de trabalho futuro adaptar os modelos e os bancos de dados de maneira a prever o momento resistente, considerando-se plastificação e instabilidade da barra.

REFERÊNCIAS

AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **ANSI/AISC 360-22, Specification for Structural Steel Buildings**. AISC, 2022.

ANDRADE, Anisio; CAMOTIM, Dinar; DINIS, P. Borges. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. **Computers & Structures**, v. 85, n. 17-18, p. 1343-1359, 2007.

ANSYS INC. **Release 24.1 – Documentation for ANSYS**. Canonsburg, Estados Unidos, 2024.

ASGARIAN, B.; SOLTANI, M.; MOHRI, Foudil. Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. **Thin-walled structures**, v. 62, p. 96-108, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações**. Rio de Janeiro: ABNT, 2024.

AUCAMP, H. **The optimisation of web-tapered portal frame buildings**. Thesis (Master of Engineering in Structural Engineering) – Faculty of Engineering, Stellenbosch University. Stellenbosch, p. 2. 2017.

BAPTISTA, A. M.; MUZEAU, J. P. Design of tapered compression members according to Eurocode 3. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 46, p. 146-148, 1998.

BEYER, A., GALÉA, Y., BUREAU, A., BOISSONNADE, N. (2015). Elastic Stability of uniform and non-uniform members with arbitrary boundary conditions and intermediate lateral restraints, **Proceedings of the Annual Stability Conference, Structural Stability Research Council**, Nashville, Tennessee, USA.

BLEICH, F. **Buckling Strength of Metal Structures**. New York: McGraw-Hill, 1952.

BRADFORD, M. A. Stability of tapered I-beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 9, n. 3, p. 195-216, 1988.

BRAHAM, Marc; HANIKENNE, Dominique. Lateral buckling of web tapered beams: An original design method confronted with a computer simulation. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 27, n. 1-3, p. 23-36, 1993.

CHEN, H.; LIU, Y.; HUANG, Y.; HUANG, J.; CAISONG, L.; GUO, Z. Maximum displacement prediction model for steel beams with hexagonal web openings under impact loading based on artificial neural networks. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 136, p. 108932, 2024.

COUTO, Carlos. Neural network models for the critical bending moment of uniform and tapered beams. In: **Structures**. Elsevier, 2022. p. 1746-1762.

OLIVEIRA, V. M.; CARVALHO, A. S.; ROSSI, A.; HOSSEINPOUR, M.; SHARIFI, Y.; MARTINS, C. H. Data-driven design approach for the lateral-distortional buckling in steel-concrete composite cellular beams using machine learning models. In: **Structures**. Elsevier, 2024. p. 106018.

DOKŠANOVIC, Tihomir; RADIĆ, Ivan; BISERČIĆ, Bojan. Buckling Resistance of Tapered Steel Columns. **Applied Sciences**, v. 13, n. 20, p. 11498, 2023.

ERMOPOULOS, John Ch. Equivalent buckling length of non-uniform members. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 42, n. 2, p. 141-158, 1997.

EUROCODE 3. EN 1993-1-1, Design of steel structures Part 1.1: General rules and rules for buildings. Bélgica, 2005.

FAKURY, R. H.; CASTRO E SILVA, A. L. R.; CALDAS, R. B. **Dimensionamento de estruturas de aço e mistas de aço e concreto**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

GALAMBOS, Theodore V. **Guide to stability design criteria for metal structures**. 5 ed. John Wiley & Sons, 1998.

GALAMBOS, Theodore V.; SUROVEK, Andrea E. **Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers**. John Wiley & Sons, 2008.

GÉRON, Aurélien. **Mãos à Obra: Aprendizado de Máquina com Scikit-Learn, Keras e TensorFlow: Conceitos, ferramentas e técnicas para a construção de sistemas inteligentes**. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2021.

GOODFELLOW, Ian; BENGIO, Yoshua; COURVILLE, Aaron. **Deep Learning**. Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2016. 800 p. ISBN 978-0262035613.

HAJDÚ, Gábor; BEKTAŞ, Nurullah; MÜLLER, Andreas. Machine learning models for the elastic-critical buckling moment of sinusoidal corrugated web beam. **Results in Engineering**, v. 23, p. 102371, 2024.

HAYKIN, Simon. **Redes neurais: princípios e prática**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

KAEHLER, Richard C.; WHITE, Donald Woodrow; KIM, Yoon Duk. **Frame design using web-tapered members**. Chicago, IL, USA: American Institute of Steel Construction, 2011.

KIM, Yoon Duk. **Behavior and design of metal building frames using general prismatic and web-tapered steel I-section members**. Georgia Institute of Technology, 2010.

- KINGMA, Diederik P.; BA, Jimmy Lei. ADAM: A Method for Stochastic Optimization. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON LEARNING REPRESENTATIONS (ICLR), 2015, San Diego. **Proceedings** [...]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. Acesso em: 27 fev. 2025.
- KOVÁČ, Michal. Lateral-torsional buckling of web-tapered I-beams. 1D and 3D FEM approach. **Procedia Engineering**, v. 40, p. 217-222, 2012.
- LEE, G.; MORRELL, M. L.; KETTER, R. L. Design of tapered members, WRC bulletin, no. 173. **Welding Research Council**, 1972.
- LIMA, Isaías; PINHEIRO, C.A.M.; SANTOS, F.A.O.; **Inteligência Artificial**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2014.
- LIU, Qingchuan; Wang, X.; Guan, Z.; Li, Z. Rapid Prediction and Parameter Evaluation of Process-Induced Deformation in L-Shape Structures Based on Feature Selection and Artificial Neural Networks. **Journal of Composites Science**, v. 8, n. 11, p. 455, 2024.
- MARQUES, L.; TARAS, A., SILVA, L. S.; GREINER, R.; REBELO, C. Development of a consistent buckling design procedure for tapered columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 72, p. 61-74, 2012.
- MARQUES, Liliana; DA SILVA, Luis Simoes; REBELO, Carlos. Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load of tapered columns. **Steel and Composite Structures**, v. 16, n. 1, p. 45-58, 2014.
- NEWMARK, Nathan Mortimore. Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 108, n. 1, p. 1161-1188, 1943.
- NGUYEN, Trong-Ha; PHAN, Van-Tien; NGUYEN, Duy-Duan. Practical ANN Model for Estimating Buckling Load Capacity of Corroded Web-Tapered Steel I-Section Columns. **International Journal of Steel Structures**, v. 23, n. 6, p. 1459-1475, 2023.
- NGUYEN, Trong-Ha; TRAN, Ngoc-Long; NGUYEN, Duy-Duan. Prediction of critical buckling load of web tapered I-section steel columns using artificial neural networks. **International Journal of Steel Structures**, v. 21, n. 4, p. 1159-1181, 2021.
- POSSIDENTE, Luca; COUTO, Carlos. Explained fire resistance machine learning models for compressed steel members of trusses and bracing systems. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 139, p. 109571, 2025.
- RAAFAT, Ahmed. **KNN example with 2 Categories and 2 Features**. [S. l.], 9 set. 2022. Disponível em: <https://mlarchive.com/machine-learning/k-nearest-neighbor-knn-explained/>. Acesso em: 27 fev. 2025.
- RAFTOYIANNIS, Ioannis G.; ADAMAKOS, Theodore. Critical lateral-torsional buckling moments of steel web-tapered I-beams. **The Open Construction & Building Technology Journal**, v. 4, n. 1, 2010.

REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. Alfragide: McGraw-Hill, 2001.

SERNA, M. A.; IBÁÑEZ, J. R.; LÓPEZ, A. Elastic flexural buckling of non-uniform members: Closed-form expression and equivalent load approach. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 67, n. 7, p. 1078-1085, 2011.

TANKOVA, T., MARTINS, J. P., SILVA, L. S., SIMOES, R., Craveiro, H. D. Experimental buckling behaviour of web tapered I-section steel columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 147, p. 293-312, 2018a.

TANKOVA, Trayana; DA SILVA, Luís Simões; MARQUES, Liliana. Buckling resistance of non-uniform steel members based on stress utilization: General formulation. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 149, p. 239-256, 2018b.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. New York: McGraw-Hill, 1961.

TRAHAIR, N. S. Interaction buckling of tapered beams. **Engineering structures**, v. 62, p. 174-180, 2014.

TRASK, Andrew W. **Grokking deep learning**. Shelter Island: Manning Publications Co., 2019.

YANG, Yeong-Bin; YAU, Jong-Dar. Stability of beams with tapered I-sections. **Journal of engineering mechanics**, v. 113, n. 9, p. 1337-1357, 1987.

YOSSIF, Wisam Victor. Elastic critical load of tapered members. **Journal of Engineering and Sustainable Development**, v. 12, n. 1, p. 148-160, 2008.

ZHANG, Lei; TONG, Geng Shu. Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 64, n. 12, p. 1379-1393, 2008.

ZIEMIAN, Ronald D. **Guide to stability design criteria for metal structures**. 6. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.