

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
COLEGIADO DE ENGENHARIA CIVIL
PROJETO DE GRADUAÇÃO**

PEDRO HENRIQUE AVANCINI GUIMARÃES

**ESTUDO COMPARATIVO DAS FORMULAÇÕES DE PROBLEMAS
DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

VITÓRIA – ES
AGOSTO / 2022

PEDRO HENRIQUE AVANCINI GUIMARÃES

**ESTUDO COMPARATIVO DAS FORMULAÇÕES DE PROBLEMAS
DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Prof. Dr. Marcos Antonio Campos Rodrigues

VITÓRIA – ES
AGOSTO / 2022

PEDRO HENRIQUE AVANCINI GUIMARÃES

**ESTUDO COMPARATIVO DAS FORMULAÇÕES DE PROBLEMAS
DE NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Marcos Antonio Campos
Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Lorenzo Augusto Ruschi e Luchi
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Vitória - ES, 18 de Agosto de 2022

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos, me protegendo, sustentando e conduzindo meus caminhos, proporcionando sabedoria, saúde e forças que me permitiram alcançar tal realização.

Agradeço aos meus pais, Carlos e Rita, que me incentivaram em todos os momentos, preenchendo-me com amor e cuidado, estando sempre dispostos a me ensinar e me compreender, dando oportunidades que me fizeram crescer enquanto pessoa e profissional. A vocês todo meu amor.

Aos meus familiares, em especial a meus irmãos João e Ana, pelo apoio e carinho comigo. Sou grato por me cercarem de alegria, torcerem pelo meu sucesso e me darem direcionamento, quando necessário

Aos meus amigos, colegas de curso e profissão, por contribuírem com a minha formação, pessoas que tornaram essa jornada mais especial, divertida e gratificante. Agradeço por partilharem comigo dias de alegrias e de dificuldades, que tornaram essa caminhada possível e mais leve.

Agradeço ao meu orientador Marcos Antonio por me acompanhar durante todo esse processo, dando todo o auxílio necessário para elaboração desse estudo, sempre com paciência e dedicação. Levarei os seus ensinamentos comigo.

Por fim, minha gratidão à Universidade Federal do Espírito Santo e aos docentes do curso de Engenharia Civil, que permitiram realizar essa graduação com tantas experiências e aprendizados essenciais para o meu desenvolvimento como profissional de engenharia civil.

RESUMO

GUIMARÃES, Pedro Henrique Avancini. **Estudo comparativo das formulações de problemas de não-linearidade geométrica**. Projeto de Graduação (Bacharelado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2022.

O presente trabalho realiza um estudo comparativo de formulações para o problema de não-linearidade geométrica de estruturas planas, considerando deformação por cisalhamento conforme teoria de flexão de Timoshenko. Assim, são analisados diferentes modelos de estruturas empregando diferentes formulações para realização de uma análise não-linear geométrica. Foram utilizadas as descrições Lagrangeana atualizada, com a consideração da influência dos termos de ordem elevada do tensor deformação durante o processo de formulação da matriz de rigidez, a formulação Lagrangeana atualizada convencional e a corrotacional. Os resultados considerando diferentes níveis de discretização foram plotados em curvas de equilíbrio e comparados com a resposta numérica de referência estabelecida por uma estrutura com maior discretização e utilizando formulação corrotacional. Constata-se que a consideração de diferentes parâmetros no processo de formulação da matriz de rigidez proporciona forte influência na resposta da estrutura quando realizada uma análise não linear geométrica. Essa influência é mais evidente próximo a carga de flambagem e na fase pós-crítica. Ao se empregar uma descrição Lagrangeana atualizada, a consideração dos termos de ordem elevada no tensor deformação gera melhores resultados. Ao se utilizar uma discretização reduzida, esta formulação fornece a melhor aproximação para a carga crítica.

Palavras-chave: Análise não-linear geométrica; termos de ordem elevada; teoria de flexão de Timoshenko; comportamento pós-crítico.

ABSTRACT

This work presents a comparative study of formulations for the geometric nonlinear analysis problem of two-dimensional structures, considering shear deformation according to Timoshenko's bending theory. In order to achieve this objective, different models of structures were analyzed using different formulations to perform a non-linear geometric analysis. The updated Lagrangian description considering the influence of high-order terms of the strain tensor during the stiffness matrix formulation process, the conventional updated Lagrangian and the co-rotational formulation were used. The results for different levels of discretization were plotted on equilibrium paths and compared with the numerical reference response established by a structure with greater discretization and using a co-rotational formulation. It is noted that the consideration of different parameters in the process of formulating the stiffness matrix provides a strong influence on the response of the structure when performing a geometric nonlinear analysis. This influence is more evident near the buckling load and in the post-critical phase. When using an updated Lagrangian description, the consideration of higher-order terms in the strain tensor yields better results. When using a reduced discretization, this formulation provides the best approximation to the critical load.

Keywords: Geometric nonlinear analysis; higher-order terms; Timoshenko beam theory; post-critical behavior.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Reações de engastamento de barra de pórtico plano	19
Figura 2.2 – Sistemas de coordenadas global (a) e local (b)	20
Figura 2.3 – Montagem da matriz de rigidez global.....	22
Figura 2.4 – Montagem do vetor de cargas nodais global.....	23
Figura 3.1 – Curva de equilíbrio e pontos críticos	27
Figura 3.2 – Trechos de estabilidade e instabilidade	29
Figura 3.3 – Convergência do método padrão (“standart”) e o modificado (“modified”)	33
Figura 3.4 – Otimização de solução pelo método de comprimento de arco constante e linear	35
Figura 3.5 – Deformação da seção pela teoria da flexão de Euler-Bernoulli.....	36
Figura 3.6 – Comparação das teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli	40
Figura 3.7 – Decomposição polar do gradiente de deformação	41
Figura 3.8 – Deformação de um elemento genérico	41
Figura 3.9 – Configuração de equilíbrio C_n , C_{n-1} , C_i e C_0	42
Figura 4.1 – Coluna engastada	50
Figura 4.2 – Configuração deformada da coluna engastada.....	51
Figura 4.3 – Viga contínua	53
Figura 4.4 – Configuração deformada da viga contínua.....	54
Figura 4.5 – Viga engastada–livre.....	56
Figura 4.6 – Configuração deformada da viga engastada–livre	57
Figura 4.7 – Pórtico de Roorda	59
Figura 4.8 – Configuração deformada do pórtico de Rooda.....	60
Figura 4.9 – Pórtico de Lee	63
Figura 4.10 – Configuração deformada do pórtico de Lee	64
Figura 4.11 – Pórtico plano	67
Figura 4.12 – Configuração deformada do pórtico	68
Figura 4.13 – Pórtico de Williams adaptado.....	71
Figura 4.14 – Configuração deformada do pórtico de Williams adaptado	71

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 4.1 – Curva de equilíbrio para coluna engastada discretizada em 2 elementos	51
Gráfico 4.2 – Curva de equilíbrio para coluna engastada discretizada em 5 elementos	52
Gráfico 4.3 – Curva de equilíbrio para viga contínua com barras discretizada em 2 elementos.....	54
Gráfico 4.4 – Curva de equilíbrio para viga contínua com barras discretizada em 5 elementos.....	55
Gráfico 4.5 – Curva de equilíbrio para viga engastada–livre com barras discretizada em 2 elementos.....	57
Gráfico 4.6 – Curva de equilíbrio para viga engastada–livre com barras discretizada em 5 elementos.....	58
Gráfico 4.7 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Roorda discretizada em 2 elementos.....	60
Gráfico 4.8 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Roorda discretizada em 5 elementos.....	61
Gráfico 4.9 – Curva de equilíbrio para $L/H=4$ e barras do pórtico de Roorda discretizadas em 5 elementos.....	62
Gráfico 4.10 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Lee discretizada em 2 elementos.....	64
Gráfico 4.11 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Lee discretizada em 5 elementos.....	65
Gráfico 4.12 – Curva de equilíbrio para $L/H=4$ e barras do pórtico de Lee discretizadas em 5 elementos.....	66
Gráfico 4.13 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico discretizada em 2 elementos	68
Gráfico 4.14 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico discretizada em 5 elementos	69
Gráfico 4.15 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Williams adaptado discretizada em 2 elementos.....	72
Gráfico 4.16 – Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Williams discretizada em 5 elementos.....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Métodos de otimização de solução	33
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações

$[A_{DL}]_{GLOBAL}$ – Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema de coordenadas global

$[A_{DL}]_{LOCAL}$ – Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema de coordenadas local

Ω_y – Parâmetro auxiliar para caracterização de elementos de barra no plano xy

I_z – Inércia da seção transversal no eixo z

\bar{P} – Vetor de carga de referência

k^f – Deformação axial por flexão

u_0 – Deslocamento axial

v_0 – Deslocamento transversal

y_{xy} – Distorção por cisalhamento no vetor de deformações pontuais

ε_x – Deformação normal na direção longitudinal

$[K_G]_{elemento}$ – Matriz de rigidez de um elemento da estrutura nas coordenadas globais

$[K_G]_{elemento}$ – Vetor de cargas nodais combinadas de um elemento da estrutura nas coordenadas globais

$[A_D]$ – Vetor de ações nodais

$[A_{DL}]$ – Vetor de esforços de engastamento perfeito

$[F]_{estrutura}$ – Vetor de cargas nodais combinadas da estrutura

$[F_G]$ – Vetor de forças nas extremidades de cada elemento

$[K]_{estrutura}$ – Matriz de rigidez da estrutura

$[K_G]$ – Matriz de rigidez no sistema de coordenadas global

$[K_L]$ – Matriz de rigidez no sistema de coordenadas local

$[D]$ – Vetor de deslocamentos

$[F]$ – Vetor de cargas nodais combinadas

$[R]$ – Matriz de transformação de coordenadas globais

G – Módulo de cisalhamento do material

Δe_{ij} – Parcela linear do tensor deformação

Δe_{xx} – Parcela linear das distorções infinitesimais associadas com uma mudança no volume

Δe_{xy} – Parcela linear das distorções associadas da mudança nos ângulos entre os vetores de base do tensor deformação

$\Delta e\eta_{xx}$ – Parcela linear das distorções infinitesimais associadas com uma mudança no volume

$\Delta\eta_{ij}$ – Parcela não-linear do tensor deformação

$\Delta\eta_{xx}$ – Parcela não-linear do tensor deformação

ΔL – Incremento do comprimento de arco

ΔU – Incremento de deslocamento

δU – Subincremento no parâmetro deslocamento

$\Delta\lambda$ – Incremento de carga

$\delta\lambda$ – Subincremento no parâmetro carga

A – Área da seção transversal

E – Módulo de elasticidade

F – Vetor de forças nodais internas

GL – Grau de Liberdade

I – Inércia da seção transversal

J – Número do nó inicial

K – Número do nó final

L – Comprimento do elemento analisado

P – Vetor de forças nodais externas

P – Carga aplicada

P – Força nodal externa

R – Vetor de forças residuais

U – Vetor de deslocamentos nodais

W – Trabalho

X – Fator de soma que define a área efetiva para cisalhamento

f' – Esforços reativos na extremidade de um elemento restringido pela aplicação de engaste nos nós

ε – Deformações generalizadas do elemento infinitesimal da barra

θ – Ângulo de inclinação de um elemento no sistema local em relação ao global

$\theta(x)$ – Ângulo rotação na seção transversal

λ – Fator de Carga

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivos	15
1.1.1 Objetivo geral	15
1.1.2 Objetivos específicos.....	15
1.2 Estrutura do projeto de graduação	16
2. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS	17
2.1 Análise local dos elementos	17
2.2 Análise global da estrutura	21
3. SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	25
3.1 Métodos simplificados	25
3.2 Análise não linear geométrica completa	26
3.2.1 Curva de equilíbrio, pontos críticos e estabilidade	27
3.2.2 Solução Incremental.....	29
3.2.3 O processo de Newton-Raphson	31
3.3 Teorias da flexão	35
3.3.1 Teoria da flexão de Euler-Bernoulli	35
3.3.2 Teoria da flexão de Timoshenko	37
3.4 Descrição cinemática	40
3.4.1 Formulação Corrotacional	40
3.4.2 Formulações Lagrangeanas.....	42
3.5 Consideração de termos de ordem elevada	43
4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	49
4.1 Coluna engastada	50
4.2 Viga contínua	53
4.3 Viga engastada–livre	56
4.4 Pórtico de Roorda	59
4.5 Pórtico de Lee	63
4.6 Pórtico plano	67
4.6 Pórtico de Williams adaptado	71
5. CONCLUSÃO	75
5.1 Sugestões para trabalhos futuros	76
6. REFERÊNCIAS	77

1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural compreende uma etapa fundamental do dimensionamento dos mais diversos tipos de estruturas presentes no cotidiano, desde uma simples viga biapoiada até um prédio de múltiplos pavimentos. Essa fase tem como objetivo a determinação do comportamento da estrutura frente a ação de carregamentos externos, ou seja, a determinação dos esforços internos, deformações e deslocamentos da estrutura.

Em uma análise estrutural, um dos desafios está na construção de um modelo que seja o mais fiel possível a estrutura real, buscando-se uma melhor simulação do comportamento estrutural. Entretanto, em geral, uma análise mais robusta e próxima da realidade está intimamente ligada a um aumento da complexidade do problema e, certamente, um maior esforço computacional.

Segundo Pereira (2002), a maioria das estruturas de engenharia exibem uma resposta linear elástica sob cargas de serviço. Desta forma, com o intuito de se realizar uma análise completa, suficientemente próxima do comportamento real da estrutura e, ao mesmo tempo, mais simplificada possível, é comum a desconsideração de alguns efeitos, como as não-linearidades física e geométrica dos materiais.

A não-linearidade física é fruto da heterogeneidade do material constituinte da estrutura, que apresenta uma relação de tensão-deformação em desconformidade com a Lei de Hooke. O concreto armado, por exemplo, é um material que sofre dos frutos desta não-linearidade, uma vez que os efeitos da fissuração, escoamento da armadura e fluência levam a uma deformação não proporcional ao aumento de tensão (MOTA, 2018). No presente projeto a não-linearidade física não é considerada, uma vez que o foco do estudo se dá nas formulações geometricamente não-lineares.

A não-linearidade geométrica, por sua vez, não está ligada ao comportamento do material, mas sim da estrutura frente a valores relativamente grandes de deslocamento, que levam ao surgimento de esforços de segunda ordem. Os efeitos desta não-linearidade são associados às equações de equilíbrio que consideram a configuração deformada e as relações deformação-deslocamento.

A consideração da não-linearidade geométrica tem se tornado cada vez mais constante nas análises estruturais, visto que, no caso de elementos estruturais mais esbeltos, uma tendência da construção civil, verifica-se que os aspectos desta não-linearidade são extremamente importantes, dando origem a fenômenos como a existência de diversas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos ao longo da curva de equilíbrio (PEREIRA, 2002).

Para consideração dos efeitos desta não-linearidade em estruturas de aço, a ABNT NBR 8800:2008 indica o método baseado na majoração dos momentos fletores e esforços normais da estrutura indeformada a partir dos coeficientes B_1 e B_2 . Já a ABNT 6118:2014 indica a utilização do coeficiente γ_z ou do método P-Delta para a consideração desses efeitos em estruturas de concreto.

Por outro lado, existem métodos com melhor aproximação, que se baseiam na resposta da estrutura em sua configuração deformada, envolvendo, assim, a criação de um modelo estrutural mais confiável e realista, eliminando hipóteses simplificadoras da análise sob não-linearidade geométrica (LEAL e CAMPELLO, 2013). O comportamento de estruturas pode ser descrito de diversas maneiras, desde modelos mais simples, até modelos que incorporam deformações advindas de cisalhamento ou teoria mais robustas que consideram deformações de ordem superior (MOTA, 2018). A descrição dos problemas de análise não-linear geométrica envolve uma série de parâmetros que, se alterados, levam a estrutura a diferentes comportamentos.

Segundo Rodrigues (2019), em uma análise considerando a não-linearidade geométrica da estrutura, condições como a teoria da flexão empregada, descrição cinemática do problema, relações entre deformações e deslocamentos, funções de interpolação utilizadas e a metodologia de análise utilizada influenciarão no resultado obtido.

A importância do estudo das formulações geometricamente não-lineares e dos diferentes métodos, descrições e formulações não se limita apenas ao estado pré-crítico, dentro dos estados limites último e de serviço da estrutura, mas também no estado pós crítico, visto que uma mesma teoria pode ser capaz de descrever o comportamento da estrutura em um estado, mas não em outro.

A alteração e combinação de todos estes parâmetros citados podem gerar soluções diversas para um mesmo problema de não-linearidade geométrica, tornando este um estudo de grande importância, antes da escolha de uma metodologia a ser seguida. O estudo e comparação destas diferentes soluções e a maneira como as mesmas respondem mediante alterações destes parâmetros é abordado no presente projeto de graduação.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Realização de um estudo comparativo das soluções de problemas de análise não-linear geométrica de estruturas planas, considerando deformação por cisalhamento conforme teoria de flexão de Timoshenko, a partir da aplicação de diferentes formulações não-lineares (Lagrangeana atualizada e Corrotacional) e considerações (influência dos termos de ordem elevada do tensor deformação) durante o processo de formulação da matriz de rigidez, com o intuito de serem observadas as influências desses parâmetros no comportamento final da estrutura, utilizando software computacional de análise estrutural.

1.1.2 Objetivos específicos

Para avaliar a influência da consideração dos diferentes parâmetros de análise em problemas de não-linearidade geométrica, estabeleceram-se os seguintes objetivos específicos:

- Avaliar a influência do aumento da discretização da estrutura nos resultados obtidos, aumentando o número de elementos que a compõe;
- Avaliar a influência do tipo de formulação escolhida, Lagrangeana atualizada ou corrotacional, no comportamento previsto para a estrutura;
- Verificar se a alteração da esbeltez da seção influencia na reação da estrutura, frente aos carregamentos impostos;
- Verificar a diferença na resposta da estrutura, frente a consideração, ou não, de termos de ordem elevada no tensor de deformação de Green-Lagrange;
- Verificar, de modo qualitativo, o custo computacional da escolha dos diferentes parâmetros, citados anteriormente;

- Avaliar o desenvolvimento da curva de equilíbrio, curva deformação versus fator de carga, nas zonas fundamental (primária ou pré-crítica) e pós-crítica (secundária);

1.2 Estrutura do projeto de graduação

O presente trabalho organiza-se nos seguintes capítulos:

CAPÍTULO 1: apresenta uma contextualização sobre a temática abordada na pesquisa, além da justificativa, dos objetivos e da estruturação adotada no trabalho.

CAPÍTULO 2: apresenta a primeira parte da revisão bibliográfica realizada para o embasamento do estudo. São explanados diversos conceitos relacionados à análise matricial de estruturas e o método da rigidez direta, abordando os mesmos na esfera local dos elementos e global da estrutura

CAPÍTULO 3: apresenta a segunda parte da revisão bibliográfica. Nele são abordados conceitos relativos aos métodos de resolução simplificados e incrementais iterativos, sendo abordados conceitos relativos às trajetórias de equilíbrio, teorias de flexão, descrições cinemáticas e utilização ou não de termos de ordem elevada no tensor deformação.

CAPÍTULO 4: apresenta os resultados obtidos a partir das rotinas de testes implementadas na pesquisa e a discussão sobre os mesmos.

CAPÍTULO 5: apresenta as conclusões deste trabalho juntamente de sugestões para o desenvolvimento de pesquisas futuras.

CAPÍTULO 6: apresenta as referências bibliográficas que embasaram este estudo.

2. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

A solução de problemas de análise estrutural é realizada em *softwares* computacionais através da formulação matricial, que se baseia na formalização em matrizes do método dos deslocamentos ou método da rigidez, originando o Método da Rigidez Direta (White, Gergely e Sexsmith, 1976).

Neste método, os parâmetros utilizados para discretização são os deslocamentos e rotações dos nós que compõe a estrutura e que não são submetidos a restrições impostas por apoios. A esses parâmetros, damos o nome de graus de liberdade.

A base do método da rigidez está na análise da estrutura de forma global e dos elementos que a compõe de forma local, de maneira que cada elemento seja considerado isoladamente.

Neste capítulo aborda-se o Método da Rigidez Direta, método base utilizado para resolução de problemas estruturais de barras via programas computacionais e que se baseia na realização de uma análise matricial de estruturas. Serão apresentadas as etapas e peculiaridades do método tanto na esfera local dos elementos, como global da estrutura.

2.1 Análise local dos elementos

No método dos deslocamentos, considera-se as barras que compõe a estrutura restringidas e, por meio da aplicação de deslocamentos e rotações unitárias nos nós, é possível determinar os termos que formam a matriz de rigidez de cada elemento, conhecidos como coeficientes de rigidez.

Já no método da rigidez direta, calcula-se a matriz de rigidez da estrutura de forma direta, somando-se a influência de cada um dos elementos de forma isolada. Esta matriz de rigidez é singular, ou seja, seu determinante é nulo, logo ela não é inversível. Tal matriz depende apenas da geometria e do material que compõe a estrutura, podendo ser obtida então a partir simples substituição de valores como o comprimento do elemento, momento de inércia da seção transversal, módulo de elasticidade, entre outros e, de forma simples, se têm os coeficientes de rigidez do elemento e a matriz de rigidez da estrutura.

Para vigas, a matriz de rigidez no sistema de coordenadas local ($[K_L]$) é igual a matriz de rigidez no sistema de coordenadas global ($[K_G]$) e dado pela expressão (2.1), onde a primeira parcela é a elástica e a segunda a geométrica. A parcela geométrica é aquela que garante a consideração da não-linearidade geométrica da estrutura durante a obtenção da solução do problema. Ressalta-se que as expressões abordadas nesta seção consideram a utilização da teoria de Euler-Bernoulli e não consideram a presença de termos de ordem elevadas, que serão abordados posteriormente.

$$\begin{aligned}
 [K_L] = [K_G] = & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & -\frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ \frac{P}{10} & \frac{2LP}{15} & -\frac{P}{10} & -\frac{LP}{30} \\ \frac{6P}{10} & -\frac{P}{15} & \frac{6P}{10} & -\frac{P}{30} \\ -\frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} & \frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} \\ \frac{P}{10} & \frac{LP}{30} & -\frac{P}{10} & \frac{2LP}{15} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

As incógnitas L e E e I representam, respectivamente, o comprimento, o módulo de elasticidade do material e a inércia da seção transversal do elemento analisado, respectivamente.

Para treliças, a matriz de rigidez no sistema local ($[K_L]$) é dada pela equação (2.2), onde a primeira parcela é a elástica e a segunda a geométrica.

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

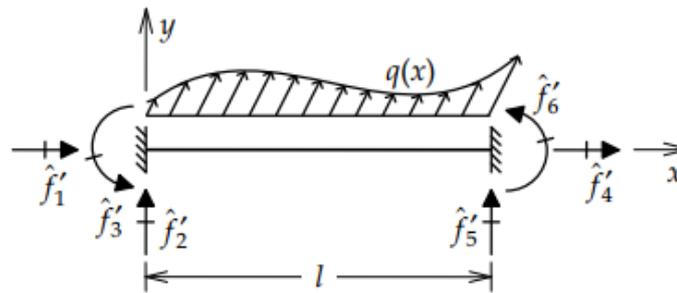
As incógnitas apresentadas são as mesmas da equação anterior, com a adição de A que representa a área da seção transversal

Para elementos de pórtico plano, basta sobrepor a matriz de rigidez para treliças e a matriz de rigidez para vigas. Assim, tem-se a matriz de rigidez local apresentada na equação (2.3), onde a primeira parcela é a elástica e a segunda a geométrica:

$$\begin{aligned}
 [K_L] = & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & \frac{2LP}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & -\frac{LP}{30} \\ -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} & 0 & \frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & -\frac{LP}{30} & 0 & -\frac{P}{10} & \frac{2LP}{15} \end{bmatrix} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Ainda no sistema local, é necessário a montagem do vetor de esforços de engastamento perfeito ($[A_{DL}]$), que corresponde aos esforços reativos na extremidade de um elemento quando restringido pela aplicação de engaste nos nós, representados na figura 2.1 como sendo as reações f' . Destaca-se que os carregamentos originais da estrutura que coincidirem com algum grau de liberdade não devem ser contabilizados no vetor de engastamento perfeito, mas sim no vetor de ações nodais ($[A_D]$).

Figura 2.1. Reações de engastamento de barra de pórtico plano



FONTE: Martha (2010)

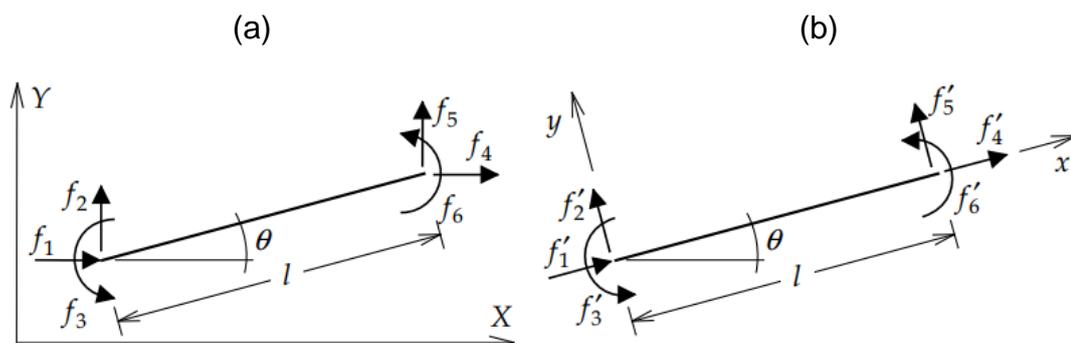
A partir das cargas nodais e cargas de engastamento perfeito, podemos montar o vetor de cargas nodais combinadas $[F]_{elemento}$, conforme apresentado na equação (2.4).

$$[F]_{elemento} = [A_D] - [A_{DL}] \quad (2.4)$$

Para efetuar a operação da equação (2.4), deve-se atentar para que o sistema de coordenadas das cargas nodais e dos esforços engastamento perfeito seja o mesmo, o global. É comum a transformação do vetor de esforços de engastamento perfeito do sistema local para o global.

Como pode ser observado na figura 2.2, nem sempre os sistemas global e local são coincidentes, assim, em alguns casos, como em treliças e pórticos, pode se fazer necessário a transformação de sistema a partir de uma matriz de transformação de coordenadas.

Figura 2.2. Sistemas de coordenadas global (a) e local (b)



FONTE: Martha (2010)

A matriz de transformação de coordenadas globais ($[R]$) é mostrada na equação (2.5):

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Por se tratar de uma matriz ortogonal, a inversa de $[R]$ é igual a sua transposta, ou seja, $[R]^{-1} = [R]^T$. Assim, pode-se obter a matriz de rigidez de um elemento no sistema global ($[K_G]$) por meio da relação da equação 2.6 e o vetor de esforços de carregamento perfeito de um elemento no sistema global ($[A_{DL}]_{GLOBAL}$) a partir da relação da equação 2.7.

$$[K_G] = [R]^T \cdot [K_L] \cdot [R] \quad (2.6)$$

$$[A_{DL}]_{GLOBAL} = [R]^T \cdot [A_{DL}]_{LOCAL} \quad (2.7)$$

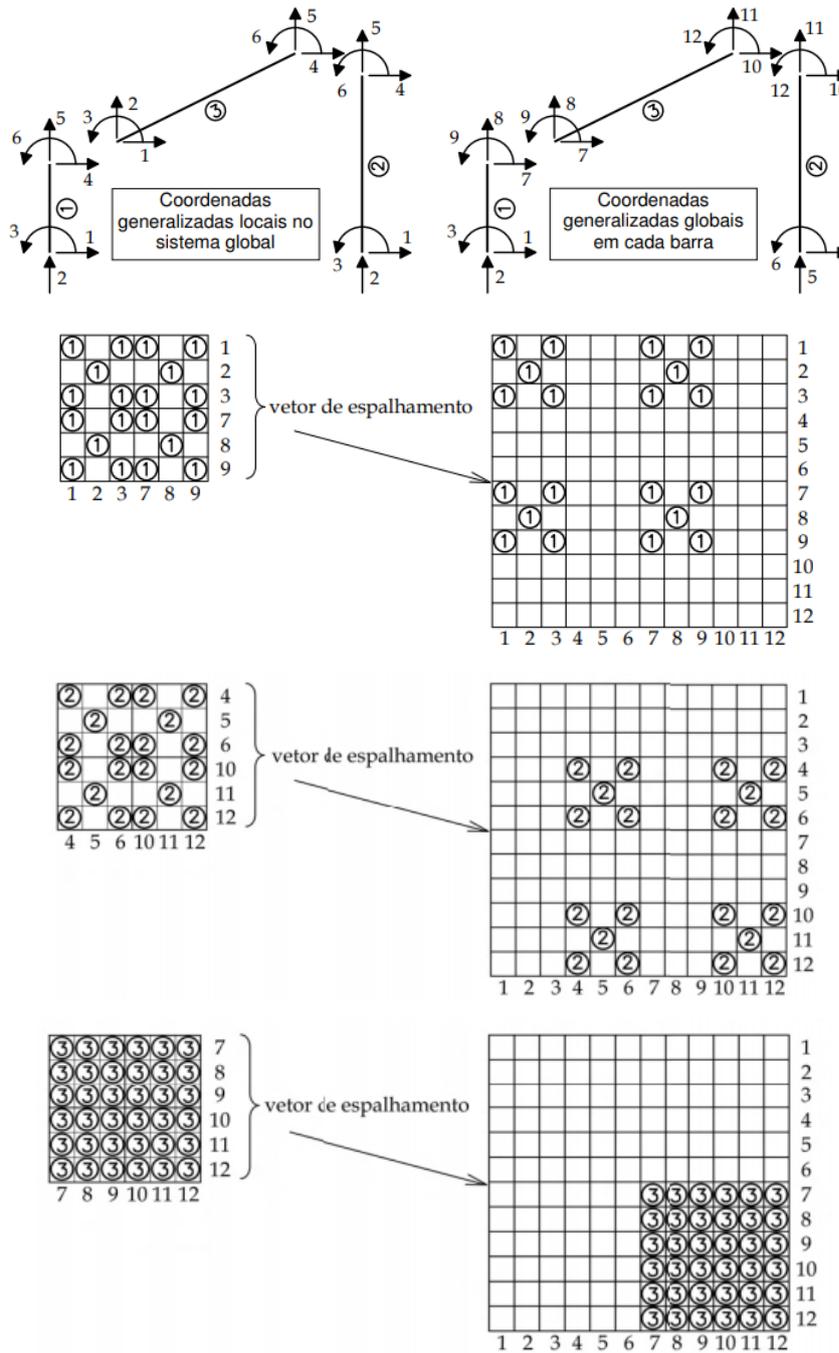
2.2 Análise global da estrutura

Uma vez garantido que as matrizes de rigidez dos elementos que compõe a estrutura estão todas no sistema global, inicia-se a montagem da matriz de rigidez global a partir da soma das contribuições das matrizes dos elementos. Essa soma é realizada de forma que os coeficientes de rigidez do elemento sejam considerados apenas para os termos da matriz de rigidez global associados às coordenadas globais dos nós iniciais e finais do elemento em questão (MARTHA, 2010).

Para a correta contribuição de cada elemento, utiliza-se um vetor de espalhamento que associa as coordenadas locais dos nós iniciais e finais com a coordenada global correspondente, conforme mostrado na figura (2.3).

A associação entre a numeração dos graus de liberdade da estrutura global e de cada elemento pode ser feita a partir da utilização da regra da correspondência, que, segundo Rovere (2012), deve ser feita de modo que em cada elemento, denominando-se J o número do nó inicial e K o número do nó final, os graus de liberdade (GL) serão numerados de 1 até $2 \times$ Quantidade de GL iniciando-se pelo nó J e seguindo-se a ordem dos eixos no sistema global.

Figura 2.3. Montagem da matriz de rigidez global



FONTE: Martha (2010)

Quando a contribuição de dois ou mais elementos recai sobre a mesma posição na matriz de rigidez global, o coeficiente de rigidez global é dado a partir da somatória dos coeficientes contribuintes, como mostrado em (2.8):

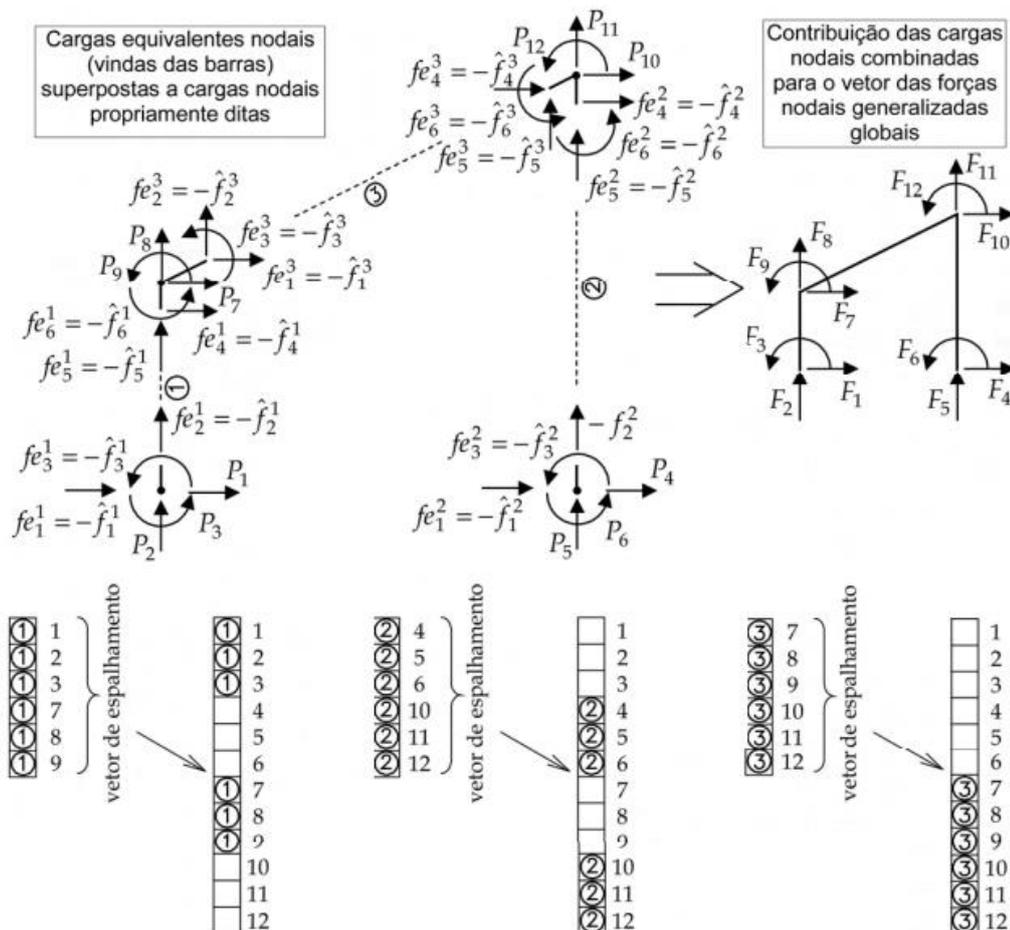
$$[K]_{estrutura} = \sum [K_G]_{elemento} \quad (2.8)$$

Da mesma maneira que é necessário posicionar os coeficientes de rigidez dos elementos para montagem da matriz de rigidez global, para a montagem do vetor de cargas nodais globais, o mesmo deve ser feito. Esse vetor considera as cargas nodais combinadas e as reações de apoio e apresenta o mesmo número de linhas que a matriz de rigidez.

Para o processo de montagem do vetor de cargas nodais global, utiliza-se também um vetor de espalhamento que permite a realocação correta dos coeficientes dos vetores de cada elemento da estrutura no vetor global, conforme mostrado na figura 2.4. Caso existam dois ou mais coeficientes que recaiam sobre a mesma posição no vetor global, o coeficiente no vetor global é dado a partir da somatória dos coeficientes contribuintes, conforme apresentado em (2.9).

$$[F]_{estrutura} = \sum [F_G]_{elemento} \tag{2.9}$$

Figura 2.4. Montagem do vetor de cargas nodais global



FONTE: Martha (2010)

Para consideração das limitações impostas por apoios, uma ferramenta matemática muito utilizada é a substituição do coeficiente de rigidez associado a um grau de liberdade que corresponde a um apoio da estrutura por um número de ordem de grandeza muito elevada.

Esse procedimento consiste na aplicação de uma rigidez infinita e faz com que as condições de apoio sejam consideradas, sem alteração das dimensões da matriz de rigidez ou do vetor de forças.

Tendo sido definidos o vetor de forças nodais global e a matriz de rigidez global, pode-se determinar os valores dos deslocamentos a partir da seguinte equação (2.10).

$$[D] = [F] \cdot [K]^{-1} \quad (2.10)$$

Uma vez determinado os valores dos deslocamentos, se os mesmos forem multiplicados pelas matrizes de rigidez locais dos elementos, como feito em (2.11), obtêm-se as forças nas extremidades de cada elemento e, assim, as reações de apoio.

$$[K_G]_{elemento} \cdot [D] = [F_G] \quad (2.11)$$

Ao se tratar de um problema de não-linearidade geométrica, as matrizes de rigidez do elemento e global da estrutura são compostas por duas parcelas, uma elástica e uma geométrica, conforme apresentado nas equações (2.1), (2.2) e (2.3).

3. SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A não-linearidade geométrica surge em função da mudança da geometria da estrutura (deformação), em razão do carregamento imposto. Essa alteração geométrica leva ao surgimento de forças internas que não são consideradas em uma análise linear tradicional.

Existem diferentes maneiras de representar o problema de não-linearidade geométrica, adotando métodos diferentes, que levarão a resultados distintos. O presente capítulo é iniciado abordando brevemente sobre alguns métodos simplificados que podem ser utilizados para consideração dos efeitos de segunda ordem em estruturas, seguido de uma descrição dos métodos incrementais e iterativos completos, que serão utilizados como bases para as análises realizadas no capítulo 4.

As teorias, descrições, formulações e considerações adotadas durante o processo também influenciam na solução do problema e esta influência é alvo deste trabalho. Para melhor compreensão das diferentes opções de soluções que serão utilizadas, este capítulo é seguido de uma apresentação sobre as principais teorias, descrições cinemáticas e considerações que podem ser realizadas.

3.1 Métodos simplificados

Em estruturas com número elevado de graus de liberdade, a aplicação do método da rigidez direta tem elevada exigência computacional. Se consideradas condições como a não-linearidade geométrica ou utilização de termos de ordem elevada, conforme será abordado posteriormente, maior será tal exigência.

Existem vários métodos simplificados de resolução do problema de não-linearidade geométrica que nos fornecem uma boa aproximação. Segundo SILVA (2017), esses métodos se destacam devido a economia de esforço computacional, quando comparados aos métodos tradicionais.

O método B1-B2, sugerido pela ABNT NBR 8800:2008, utiliza-se de coeficientes de majoração para consideração dos esforços de segunda ordem. Já o método sugerido pela ABNT NBR 6114:2014 (método do coeficiente γ_z) e o método P-Delta se baseiam na geração de deslocamento de segunda ordem pelas forças verticais e de primeira

ordem pelas forças horizontal. Por fim, no método dos dois ciclos iterativos calcula-se a solução elástica do problema, para, a partir desta, se calcular a matriz de rigidez geométrica, somá-la a matriz de rigidez elástica e se chegar na solução mais completa.

Conforme são chamados, estes métodos são simplificações para consideração dos efeitos de segunda ordem nas estruturas, levando em conta diversas aproximações. A utilização destes métodos pode trazer soluções próximas do esperado para alguns casos, principalmente em situações de projeto, entretanto, em outros casos podem levar a resultados incertos. Dessa forma, é necessária uma análise não-linear geométrica completa, utilizando matriz de rigidez geométrica e métodos incrementais iterativos.

3.2 Análise não linear geométrica completa

Conforme mostrado nos capítulos anteriores, a matriz geométrica global de um problema de análise não-linear geométrica é obtida adicionando os coeficientes de rigidez de cada matriz local aos correspondentes graus de liberdade da matriz global. Nesse caso obtêm-se um sistema não-linear de equações e, para solucionar tais problemas, o uso de procedimentos incrementais e iterativos têm sido muito comuns (RANGEL, 2019).

Esses processos se baseiam no fato da condição de equilíbrio em qualquer ponto ser dependente da geometria deformada da estrutura e das forças internas dos elementos. Para desenvolvimento da solução, faz-se o uso de carregamentos incrementais, que geram deslocamentos incrementais. Os carregamentos e deslocamentos incrementais fazem com que a estrutura busque um novo estado de equilíbrio e, para cálculo das novas equações de equilíbrios que surgem a cada passo, utiliza-se métodos iterativos (SANTANA, 2015).

Resumidamente, três passos constituem o processo. Primeiramente é selecionado um incremento de carga, definido como incremento inicial do parâmetro de carga, a partir da última configuração de equilíbrio. Em seguida determina-se o incremento dos deslocamentos nodais. Por fim, tendo os dois incrementos, procura-se, através de uma estratégia iterativa, corrigir a solução incremental inicialmente proposta por meio de um método escolhido.

3.2.1 Curva de equilíbrio, pontos críticos e estabilidade

A apresentação dos resultados da análise não-linear pode ser representada de forma gráfica em diagramas carga versus deformação, chamados de curva ou trajetória de equilíbrio. Uma metodologia eficiente para solução desses problemas deve ser capaz de traçar fielmente tal trajetória, passando por todos os pontos singulares ou críticos (ROCHA, 2000). Nessas curvas pode-se destacar três pontos críticos: limite de carga, limite de deslocamento e bifurcações, conforme mostrado na figura (3.1).

Figura 3.1. Curva de equilíbrio e pontos críticos



FONTE: Santana (2015)

Os pontos em que a tangente da curva é positiva são considerados pontos de estabilidade, enquanto os pontos em que a tangente é negativa, não. Os pontos de tangente horizontal ou vertical representam, em geral, pontos críticos e o conhecimento desses pontos é de suma importância para a análise da estrutura.

O ponto limite de carga está associado ao fenômeno de *snap-through* em que, ao aplicar um controle de carga, um grande deslocamento ocorre em razão da baixa rigidez do sistema. O ponto limite de deslocamento, por sua vez, é o contrário e ocorre devido a elevada rigidez do sistema que causa um fenômeno de *snap-back*, ou seja, ao ser aplicado um controle de deslocamento, o sistema sofre uma variação instantânea de carga. Por fim, a bifurcação ocorre quando, a partir de um ponto, a estrutura pode seguir por duas trajetórias de equilíbrio diferentes, estando geralmente

associada ao fenômeno de flambagem da estrutura. A trajetória seguida pela estrutura corresponde a que necessita de menor energia.

As configurações de equilíbrio nas quais a estrutura perde estabilidade são caracterizados por pontos singulares limites de carga ou de bifurcações, já abordados nesta seção. Os pontos limites de deslocamento também apresentam suas peculiaridades, todavia esses pontos não são associados a condições de estabilidade, mas sim em implicações numéricas e matemáticas da curva.

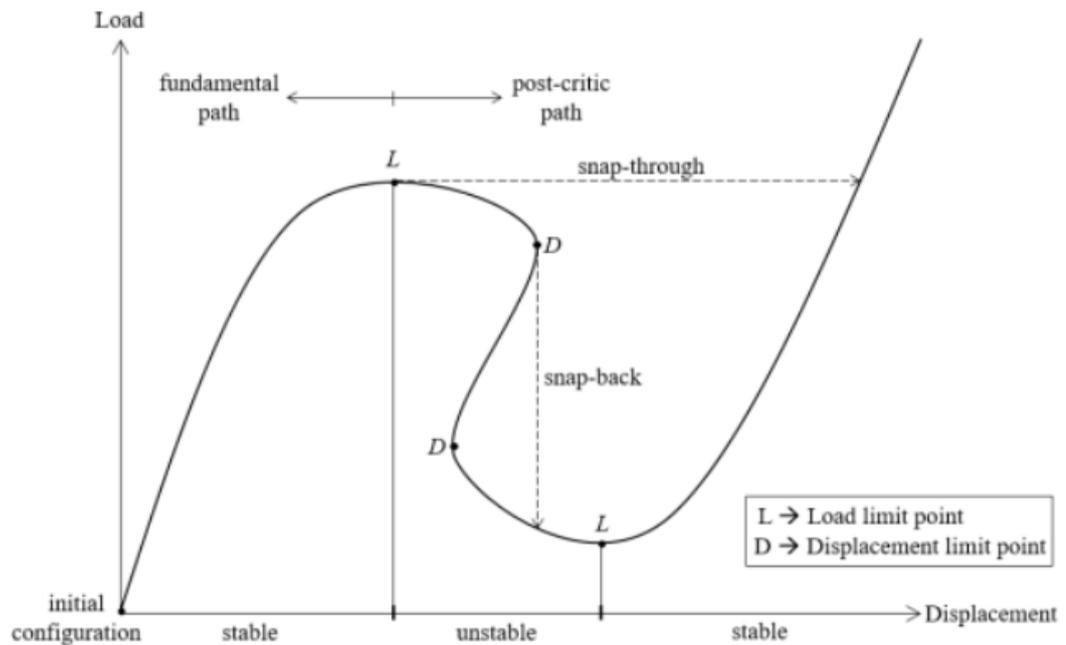
Para a passagem pelos pontos críticos é necessário a utilização de uma equação adicional de restrição sob o sub-incremento do parâmetro de carga. Devido as diversas possibilidades de restrição, o sub-incremento do parâmetro carga pode ser calculado de diferentes maneiras, assim, diversas estratégias de iteração podem ser utilizadas.

Uma vez conhecidos os incrementos de carga e deslocamento, a partir do método iterativo escolhido, pode-se calcular o resultado do passo de carga atual e escolher uma nova estimativa para o próximo passo.

A escolha da nova estimativa é uma etapa muito sensível. Em uma análise linear, a curva de equilíbrio é uma linha reta sem limite de carregamento, enquanto em formulações não-lineares são obtidas curvas complexas com pontos críticos e comportamentos diferentes para um mesmo grau de carregamento. Assim, em regiões de comportamento fortemente não-linear, o passo de carga deve ser pequeno. Por outro lado, para regiões de comportamento linear, o passo pode ser grande sem que haja perda significativa na discretização do diagrama. Os trechos estáveis ("stable" em inglês) e instáveis ("unstable" em inglês), são mostrados na figura 3.2.

A parte da curva de equilíbrio que vai desde a origem dos eixos até o ponto crítico é chamada de fundamental, pré-crítica ou primária. No ponto singular a curva primária é conectada com a secundária, ou pós-crítica. A maioria das estruturas é dimensionada para trabalhar no regime linear, todavia o estudo do regime pós-crítico é importante ao se analisar o comportamento da estrutura em situações de emergência que não correspondem as condições de estabilidade normalmente consideradas.

Figura 3.2. Trechos de estabilidade e de instabilidade



FONTE: Maximiano, Silva e Silveira (2012)

3.2.2 Solução Incremental

A base para solucionar os problemas de equilíbrio gerados a cada passo de carga está na análise das forças externas e internas que atuam na estrutura. Como a estrutura sempre busca por uma nova configuração de equilíbrio, pode-se pressupor que o somatório das forças externas e internas será igual a zero, conforme expresso em (3.1).

$$P(\lambda) - F_i(U) = 0 \therefore P(\lambda) = F_i(U) \quad (3.1)$$

Onde P é o vetor de forças nodais externas em função do parâmetro de carga λ e F_i o vetor de forças internas em função dos deslocamentos nodais no sistema U .

O vetor de forças nodais externas pode ser expressado pelo produto do parâmetro de carga (λ) pelo vetor de cargas de referência (\bar{P}), mostrado na equação (3.2).

$$P = \lambda \bar{P} \quad (3.2)$$

A solução desse problema se dá através de métodos incrementais. Assim, para um determinado passo i , o vetor de forças nodais externas será dado pela soma do parâmetro de carga do passo anterior ($i-1$) com o incremento de carga do passo i ($\Delta\lambda_i$) multiplicados pelo vetor de cargas de referência, como apresentado na equação (3.3).

$$P_i = (\lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i) \cdot \bar{P} \quad (3.3)$$

De forma análoga, a equação (3.4) explicita que o deslocamento do passo i (U_i) será dado pelo deslocamento do passo anterior ($i-1$) somado ao incremento de carga do passo i (ΔU_i).

$$U_i = U_{i-1} + \Delta U_i \quad (3.4)$$

Esse mesmo processo se repete a cada passo de carga. Assim, de maneira genérica pode-se escrever a equação (3.5):

$$F(U_i) = P_i \quad (3.5)$$

Substituindo as relações já apresentadas, chega-se na expressão (3.6):

$$F(U_{i-1} + \Delta U_i) = (\lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i) \cdot \bar{P} \quad (3.6)$$

Desenvolvendo, obtém-se as equações (3.7) e (3.8):

$$F(U_{i-1}) + F(\Delta U_i) = (\lambda_{i-1}) \cdot \bar{P} + (\Delta\lambda_i) \cdot \bar{P} \quad (3.7)$$

$$F(\Delta U_i) - (\Delta\lambda_i) \cdot \bar{P} = (\lambda_{i-1}) \cdot \bar{P} - F(U_{i-1}) \quad (3.8)$$

Como no passo anterior ($i-1$) o sistema estava em equilíbrio, as forças internas e externa se anulam e $(\lambda_{i-1}) \cdot \bar{P} - F(U_{i-1})$ tem resultado igual a 0. Trazendo esse conceito em termos de equação, apresenta-se a expressão (3.9).

$$F(\Delta U_i) - (\Delta\lambda_i) \cdot \bar{P} = 0 \therefore F(\Delta U_i) = \Delta\lambda_i \cdot \bar{P} \quad (3.9)$$

A matriz de rigidez K pode ser determinada como a derivada das forças internas em relação aos deslocamentos, como apresentado na equação (3.10):

$$K = \frac{\delta F}{\delta U} \quad (3.10)$$

Assim, pode-se reescrever a equação das forças internas em função da matriz de rigidez, conforme mostrado na equação (3.11)

$$F(\Delta U_i) = \Delta U_i \cdot K_{i-1} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.9), temos:

$$F(\Delta U_i) = (\Delta \lambda_i) \cdot \bar{P} \quad \therefore \quad \Delta U_i \cdot K_{i-1} = \Delta \lambda_i \cdot \bar{P} \quad (3.12)$$

Conforme apresentado anteriormente, a matriz de rigidez pode ser determinada como a derivada das forças internas pela derivada dos deslocamentos nodais. Todavia, como as forças internas são uma função não-linear dos deslocamentos, a solução da equação anterior (3.12) não satisfaz o equilíbrio. Assim, obtêm-se um vetor de forças residuais da diferença das forças internas e externas.

3.2.3 O processo de Newton-Raphson

O processo de Newton-Raphson consiste em uma série de iterações que visam eliminar o vetor de forças residuais, de modo que a estrutura que estava em equilíbrio no passo $i-1$ assuma nova condição de equilíbrio no passo i .

A cada passo de iteração, indicado pela letra $j = 1, 2, 3, \dots$, obtêm-se um incremento no parâmetro de carga e no deslocamento, $\delta \lambda$ e δU . Esses incrementos representam a correção dos valores de carregamento e deslocamento no respectivo passo. Dessa forma, no passo genérico j tem-se o apresentado em (3.13) e (3.14).

$$\Delta U_i = \Delta U_i^j + \delta U_i^{j-1} \quad (3.13)$$

$$\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_i^j + \delta \lambda_i^{j-1} \quad (3.14)$$

Assim, o valor total de carregamento e deslocamentos no passo j de iteração da condição i de equilíbrio será descrito, conforme mostrado em (3.15) e (3.16).

$$U_i^j = U_{i-1} + \Delta U_i^j \quad (3.15)$$

$$\lambda_i^j = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_i^j \quad (3.16)$$

Assim, após j iterações, o vetor de força residual será dado por:

$$R_i^j = \lambda_i^j \cdot \bar{P} - F(U_i^j) \quad (3.17)$$

Pode-se obter o vetor de forças residuais a partir de uma série de Taylor, assumindo uma situação em que os incrementos são infinitesimais e que se pode avaliar U_i^{j-1} . O sistema resultante para calcular o incremento iterativo dos deslocamentos é dado pela equação (3.18) e o corrigido para (3.19).

$$K_i^{j-1} \cdot \delta U_i^j = \delta \lambda_i^j \cdot \bar{P} + R_i^{j-1} \quad (3.18)$$

$$U_i^j = U_i^{j-1} + \delta U_i^j \quad (3.19)$$

As condições iniciais para início do processo iterativo na condição i de equilíbrio são resultado do final do último passo e mostradas em (3.20) e (3.21).

$$\lambda_i^0 = \lambda_{i-1} \quad (3.20)$$

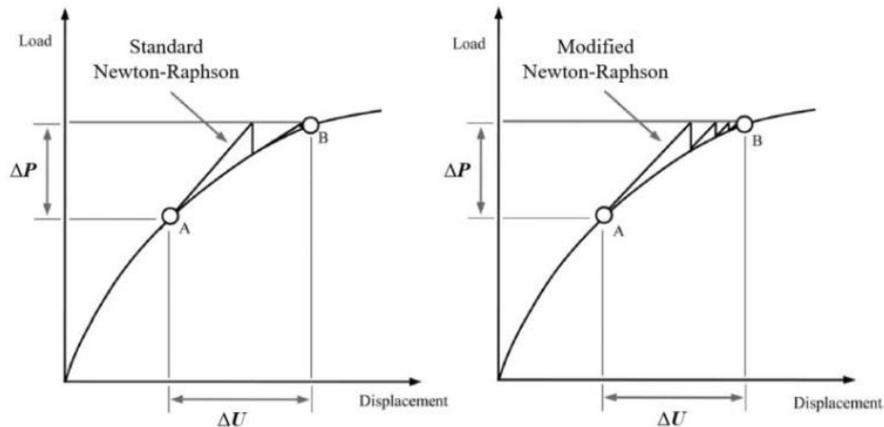
$$U_i^0 = U_{i-1} \quad (3.21)$$

O processo de Newton-Raphson é muito utilizado para resolução de problemas de não-linearidade geométrica por causa das suas propriedades de convergência. Caso se tenha um erro em uma iteração, esse erro será da ordem de e^2 na próxima iteração, e^3 na terceira e assim sucessivamente. Por outro lado, caso as condições de contorno não sejam satisfeitas, a iteração irá divergir. Nesse caso, a ação que deve ser tomada é a diminuição da magnitude do incremento.

Neste processo, a cada iteração j , uma nova matriz de rigidez é calculada, todavia esse procedimento tem um custo computacional elevado e em alguns casos, como de situações onde se considera termos de ordem elevada, pode se tornar improdutivo. Assim, uma modificação que pode ser considerada no processo de Newton-Raphson é a consideração de uma matriz de rigidez padrão onde $K_i^{j-1} = K_i^j$ para j maior que 1.

A figura 3.3 apresenta o método padrão de Newton-Raphson e o método modificado. Por mais que apresente um custo computacional menor em relação ao método padrão, o método modificado apresenta uma convergência mais lenta, sendo necessárias mais iterações.

Figura 3.3. Convergência do método padrão (“standard”) e o modificado (“modified”)



FONTE: Rangel (2019)

Além do método modificado de Newton-Raphson existem outras estratégias numéricas de correção da solução não-linear, como a de controle de carga, controle de trabalho comprimento de arco constante, comprimento de arco linear, norma mínima dos deslocamentos residuais (MNCM), resíduos ortogonais, entre outros. Esta diversidade de opções é fruto da incapacidade das estratégias em resolver problemas fortemente não-lineares (SEGUNDO, 2019).

A diferença destes métodos está basicamente nas condições de contorno impostas para definição das técnicas de previsão de valores de um novo passo e nas metodologias de correção consideradas. A tabela (3.1) aborda os métodos de solução, metodologia de incremento, metodologia de correção do fator de carga para alguns métodos existentes.

Tabela 3.1. Métodos de otimização de solução

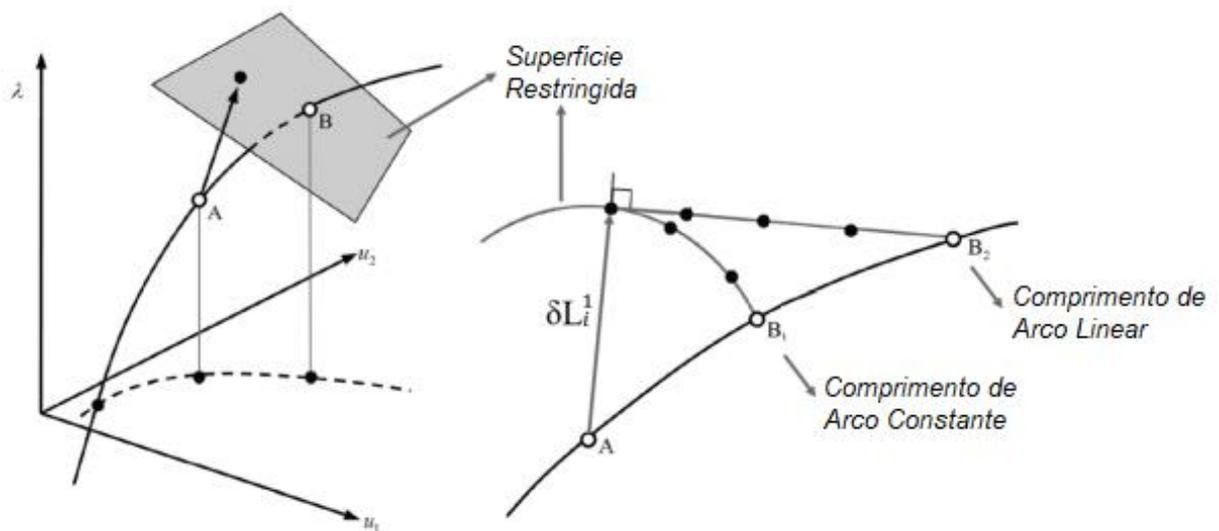
Método de Solução	Metodologia de Incremento	Metodologia de correção do Fator de Carga
Controle de Carga	Incremento de Carga	$\delta\lambda$ é dado como nulo nos ajustes da solução

Controle de Trabalho	Incremento de Trabalho Externo	Incremento nulo de trabalho externo ($W = \bar{P} \cdot \delta U_j^i$) nos ajustes da solução
Comprimento de Arco Constante	Incremento de Arco Cilíndrico e Incremento de Arco Esférico	O incremento do comprimento de arco (ΔL) é mantido constante nos ajustes da solução, conforme ilustrado na figura 3.4
Comprimento de Arco Linear	Incremento de Arco Cilíndrico	Os incrementos iterativos são restritos a um plano ortogonal ao incremento da solução anterior, conforme apresentado na figura 3.4
Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais	Incremento de Arco Cilíndrico	Os deslocamentos residuais devido às forças desequilibradas (erros) são eliminados. Para isso, em um sistema com m graus de liberdade, a derivada em $\delta\lambda$ da somatória dos m erros quadrados deve ser nula
Resíduos Ortogonais	Incremento de Arco Cilíndrico	Estabelece um vetor de forças residuais, definidas como a diferença das forças externas no passo atual com as internas do passo anterior. A técnica de correção consiste em garantir que este vetor seja ortogonal ao vetor de incremento de deslocamentos do passo anterior

FONTE: Adaptado de Rangel (2019)

A diferença das condições impostas pelos métodos do comprimento de arco constante e linear podem ser observados na figura 3.4, apresentada a seguir. Para o caso do arco constante, o incremento do comprimento de arco (ΔL) é mantido constante, enquanto que para o caso do arco linear, os incrementos são mantidos em um plano ortogonal ao incremento anterior.

Figura 3.4. Otimização de solução pelo método de comprimento de arco constante e linear



FONTE: Rangel (2019)

No presente trabalho, o método de correção utilizado foi o da Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. Optou-se pela utilização de um único método de modo que esta definição não influenciasse na compreensão da influência dos demais parâmetros analisados neste estudo no comportamento da estrutura.

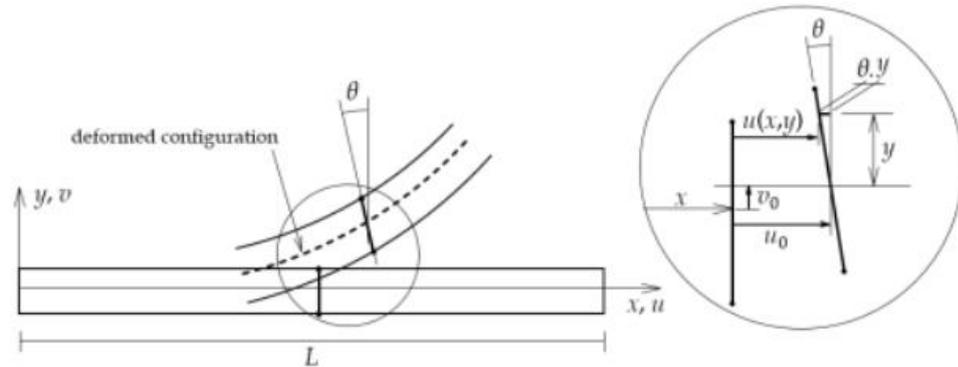
3.3 Teorias de flexão

Em uma análise não-linear geométrica, a resposta da estrutura é diretamente relacionada a teoria de flexão adotada. Neste trabalho serão abordadas as principais teorias relativas ao problema, a teoria da flexão de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

3.3.1 Teoria de flexão de Euler-Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli é amplamente utilizada na idealização do comportamento de estruturas, se baseando na hipótese de que uma linha reta e normal à superfície de um elemento permanecerá desta maneira após a deformação (BORGES E MADONA, 2019), como é mostrado na figura 3.5. Essa hipótese se faz verdadeira ao serem feitas algumas simplificações, como desprezar a influência provocada pela força cortante na deformação e os efeitos de poisson.

Figura 3.5. Deformação da seção pela teoria da flexão de Euler-Bernoulli



FONTE: Martha (2018)

A desconsideração dos efeitos de cisalhamento impõe uma limitação à teoria, uma vez que para elementos pouco esbeltos, os resultados se distanciam consideravelmente dos resultados obtidos por meio de teorias que levam em consideração esses efeitos.

Nesta teoria o ângulo de rotação na seção transversal (θ) pode ser aproximado pela sua tangente e se relaciona com o deslocamento transversal (v_0) da forma mostrada na expressão (3.22).

$$\theta(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} \quad (3.22)$$

O campo de deslocamento no interior do elemento pode ser expresso em termos dos deslocamentos axiais e transversais, conforme apresentado nas equações 3.23 e 3.24.

$$u(x, y) = u_0(x) - \gamma \cdot \theta(x) = u_0(x) - \gamma \frac{dv_0}{dx} \quad (3.23)$$

$$v(x, y) = v_0(x) \quad (3.24)$$

Agrupando-se a deformação normal na direção longitudinal e a distorção por cisalhamento no vetor de deformações pontuais e considerando a distorção por cisalhamento nula, tem-se o descrito em (3.25).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & -(d^2/dx^2) \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Agrupando para o vetor de deformações generalizadas do elemento infinitesimal da barra (ε), em que cada componente representa uma das deformações elementares,

temos o descrito em (3.26). Onde k^f corresponde a deformação axial por flexão, γ_{xy} a deformação por cisalhamento e ε_x^a a deformação normal na direção longitudinal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \gamma_{xy} \\ k^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2/dx^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

As matrizes de rigidez dos elementos fundamentais, viga, treliça e pórtico, considerando esta teoria, foram apresentadas no capítulo 2 deste trabalho.

3.3.2 Teoria da flexão de Timoshenko

Esta teoria se difere da primeira destacando-se a consideração dos efeitos de cisalhamentos. Para considerar as distorções causadas pelas forças cisalhantes, a seção transversal não permanece necessariamente normal em relação ao eixo da viga após a deformação e a rotação fica desassociada da tangente elástica, conforme mostrado na equação (3.27).

$$\theta(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} - \gamma \quad (3.27)$$

Desta maneira, as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações são apresentadas em (3.28) e o vetor de deformações generalizadas em (3.29).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & -(d/dx) \cdot y \\ 0 & d/dx & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \gamma_{xy} \\ k^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & -1 \\ 0 & 0 & d/dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

As matrizes de rigidez dos elementos fundamentais, viga, treliça e pórtico, considerando esta teoria são apresentadas em (3.30), (3.31) e (3.32), respectivamente.

$$\begin{aligned}
[K_L] = & \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

As incógnitas P , L , E , I_z , A e Ω_y representam, respectivamente, a carga equivalente atuante, o comprimento do elemento, o módulo de elasticidade do material que o compõe e a inércia no eixo z da seção transversal, a área da seção transversal e parâmetro auxiliar para caracterização de elementos de barra no plano xy : $\Omega_y = EI_z/XGAL^2$ (Onde: X = fator de soma que define a área efetiva para cisalhamento e G o módulo de cisalhamento do material)

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

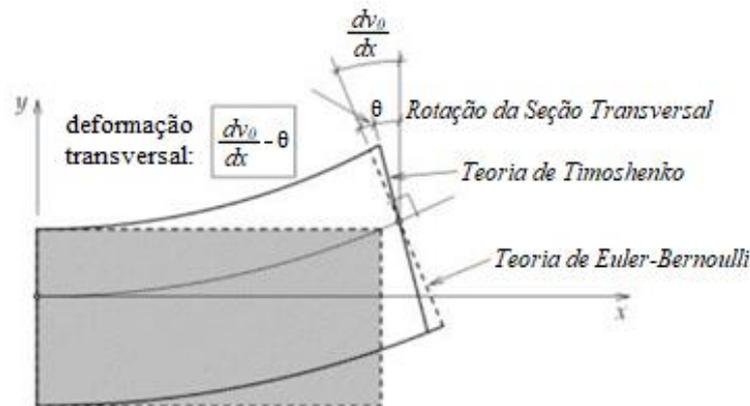
As incógnitas L , E , A e P representam, respectivamente, o comprimento do elemento, o módulo de elasticidade do material que o compõe, a área da seção transversal e a carga atuante.

$$\begin{aligned}
[K_L] = & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_Z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_Z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_Z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_Z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ 0 & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{z1}}{L} \\ 0 & -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ 0 & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ 0 & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{z2}}{L} \\ 0 & \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} \\ 0 & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

As incógnitas presentes na equação (3.32) são as mesmas já apresentadas nas equações (3.30) e (3.31).

A comparação das teorias de Euler e Timoshenko é apresentada na figura à seguir (3.6)

Figura 3.6. Comparação das teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli



FONTE: Martha (2018)

3.4 Descrição cinemática

A busca por maneiras de representar o problema de não-linearidade geométrica de maneira mais eficiente e fiel ao real comportamento da estrutura leva a análise de diferentes descrições cinemáticas. Normalmente a escolha recai entre as descrições referenciais e espaciais. θ

São abordadas neste trabalho as descrições referenciais, onde as variáveis característica são a posição da partícula de acordo com um plano de referência estabelecido e o instante em que a mesma é analisada. Dentro da teoria da linearidade, a configuração de referência é sempre a não deformada, já nos problemas de não-linearidade geométrica, a configuração de referência é a da estrutura após a deformação. A diferença das descrições lagrangeana total, lagrangeana atualizada e corrotacional, que são abordadas neste trabalho, estão basicamente na configuração de referência adotada na análise.

As formulações oriundas das descrições espaciais não são abordadas neste trabalho, uma vez que sua aplicação se dá principalmente na área de mecânica dos fluidos.

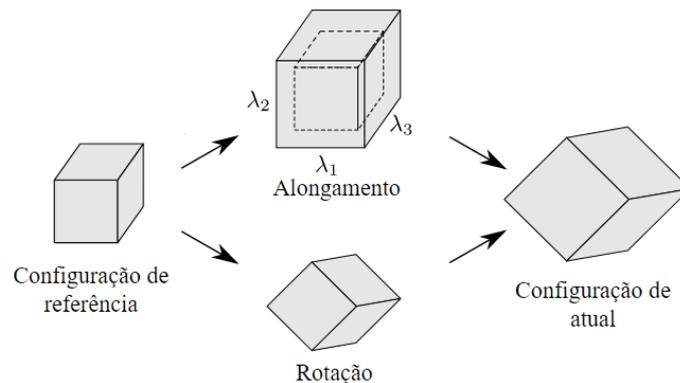
3.4.1 Formulação Corrotacional

A formulação corrotacional surge do teorema da decomposição polar do gradiente da deformação, que permite descrever a deformação como produto de um tensor de rotação e/ou translação, descrevendo o movimento de corpo rígido, e um tensor de deformação pura ou alongamento puro, conforme mostrado na figura (3.7). O papel

do tensor de rotação/translação é volver o elemento deformado, de acordo com o tensor de alongamento puro, para a correta posição e direção da deformação.

A alteração da configuração de referência para a configuração deformada se dá, então, através de dois passos, o movimento de corpo rígido, incluindo a rotação e translação do elemento, e o alongamento puro ou, segundo Battini (2002), os deslocamentos naturais do elemento.

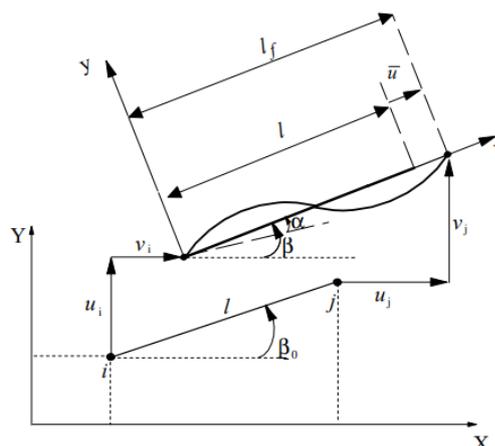
Figura 3.7. Decomposição polar do gradiente de deformação



FONTE: Argenta (2020)

Os passos descritos anteriormente ocorrem de forma simultânea e podem ser observados na figura 3.8, onde a nova configuração marcada pelos vetores u_i , v_i , u_j e v_j pode ser decomposta na translação/rotação do elemento de comprimento " l " (movimento de corpo rígido) e alongamento/deformação do mesmo (deformação pura).

Figura 3.8. Deformação de um elemento genérico



FONTE: Silva (2016)

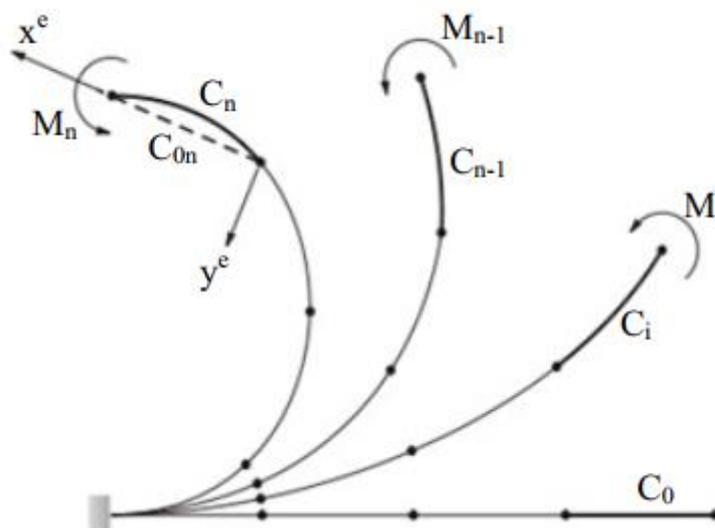
Essa decomposição permite que a formulação corrotacional seja bem fiel ao comportamento da estrutura, uma vez que é capaz de reconhecer o movimento de corpo rígido e não o contabilizar como deformação.

3.4.2 Formulações Lagrangeanas

As formulações Lagrangeanas, diferentemente da corrotacional, não tem como base a decomposição do problema em deformação pura e movimento de corpo rígido, mas tratam o mesmo como um todo, analisando apenas a diferença entre as configurações em dois instantes diferentes. A grande diferença entre as formulações Lagrangeanas, total e atualizada, está exatamente no instante em que essas análises são feitas.

Quando a configuração de referência escolhida para comparar com a atual da estrutura ($t = n$, Configuração = C_n) é a no tempo inicial $t = 0$ e configuração = C_0 , temos uma descrição Lagrangeana total. Quando a configuração de referência escolhida é C_{n-1} , analisada no tempo $t = n-1$, temos uma formulação Lagrangeana atualizada. Ou seja, a formulação Lagrangeana total mantém o referencial fixo na configuração não deformada, enquanto que, na lagrangeana atualizada, o sistema de referência é transportado para a posição deformada a cada passo de carga (CODES, 1978). Essas diferenças podem ser observadas na figura (3.9) apresentada a seguir.

Figura 3.9. Configurações de equilíbrio C_n , C_{n-1} , C_i e C_0



FONTE: Yshii (2002)

A escolha de qual formulação a ser utilizada depende de inúmeros fatores como geometria da estrutura, teoria da flexão utilizada, consideração ou não de não-linearidade geométrica, esforço computacional, entre outros. Dentro dos problemas de não-linearidade geométrica, a escolha da descrição a ser utilizada e a sua influência no resultado obtido é um dos alvos deste estudo. Neste trabalho foram avaliadas as formulações corrotacional e Lagrangeana atualizada.

3.5 Consideração de termos de ordem elevada

Durante a construção das matrizes de rigidez dos problemas, é comum a realização de considerações e simplificações que levam ao desprezo de termos de ordem elevada do tensor de deformação de Green-Lagrange, apresentado nas equações (3.33) e (3.34). A consideração desses termos surge da busca de soluções mais próximas das analíticas. Assim, desejando refinar a solução, o emprego de mais termos do tensor pode ser inserido na análise (RODRIGUES, 2019).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.34)$$

Conforme apresentado em (3.35), o tensor é composto de uma parcela linear (Δe_{ij}) e uma não-linear ($\Delta \eta_{ij}$).

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (3.35)$$

A consideração apenas da parcela linear, apresentada em (3.36) e (3.37), é capaz de gerar a matriz de rigidez elástica. Todavia, para consideração dos efeitos da não-linearidade geométrica e geração da matriz de rigidez geométrica, é necessário a consideração da parcela não-linear, conforme apresentado em (3.38) e (3.39)

Parcela Linear:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.36)$$

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.37)$$

Parcela Não-linear:

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.38)$$

$$\Delta\eta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.39)$$

Utilizando o campo de deslocamento de um elemento infinitesimal, tem-se o apresentado em (3.40) e (3.41)

$$u(x, y) = u_0 - y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.40)$$

$$v(x, y) = v_0 \quad (3.41)$$

Substituindo (3.40) e (3.41) em (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39), escreve-se:

Parcela Linear:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (3.43)$$

Parcela Não-linear:

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$\eta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.43)$$

A consideração de termos de ordem elevada no tensor de deformação de Green-Lagrange consiste na consideração dos termos $y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2$ e $y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x}$ da equação (3.42) e $y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x}$ da equação (3.43).

Com a adoção dos termos de ordem elevada e utilização da teoria de Euler-Bernoulli, a matriz de rigidez se apresenta conforme apresentado nas equações (3.44), (3.45) e (3.46) para vigas, pórticos planos e treliça plana, respectivamente.

$$\begin{aligned}
[K_L] &= [K_G] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_z}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & -\frac{6P}{5L} - \frac{12PI_z}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} \\ \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & \frac{2LP}{15} + \frac{4PI_z}{AL} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & -\frac{LP}{30} + \frac{2PI_z}{AL} \\ -\frac{6P}{5L} - \frac{12PI_z}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_z}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} \\ \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & -\frac{LP}{30} + \frac{2PI_z}{AL} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & \frac{2LP}{15} + \frac{4PI_z}{AL} \end{bmatrix} \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_L] &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_{Z1}}{L} & -\frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_{Z2}}{L} \\ 0 & \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_z}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & 0 & -\frac{6P}{5L} - \frac{12PI_z}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} \\ 0 & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & \frac{2LP}{15} + \frac{4PI_z}{AL} & 0 & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & -\frac{LP}{30} + \frac{2PI_z}{AL} \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{Z1}}{L} & \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{Z2}}{L} \\ 0 & -\frac{6P}{5L} - \frac{12PI_z}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & 0 & \frac{6P}{5L} + \frac{12PI_z}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} \\ 0 & \frac{P}{10} + \frac{6PI_z}{AL^2} & -\frac{LP}{30} + \frac{2PI_z}{AL} & 0 & -\frac{P}{10} - \frac{6PI_z}{AL^2} & \frac{2LP}{15} + \frac{4PI_z}{AL} \end{bmatrix} \quad (3.45)
\end{aligned}$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & -\frac{M_{z1}}{L} & -\frac{P}{L} & -\frac{M_{z2}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{P}{L} & \frac{M_{z1}}{L} & \frac{P}{L} & \frac{M_{z2}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

As incógnitas L , E , I_z , A , M_{z1} e M_{z2} representam, respectivamente, o comprimento do elemento, o módulo de elasticidade do material que o compõe, a inércia da seção transversal, a área da seção transversal, momento fletor (em torno do eixo z) na extremidade inicial da barra e o momento fletor (em torno do eixo z) na extremidade final da barra.

Observa-se que a consideração de termos de ordem elevada interfere apenas na matriz de rigidez geométrica, não havendo sentido essa consideração quando trata-se de problemas de linearidade geométrica. Percebe-se ainda que, desconsiderando esses termos, chega-se as equações (2.1), (2.2) e (2.3), já apresentadas anteriormente.

Para o caso da utilização da teoria de Timoshenko, tem-se as seguintes matrizes de rigidez, conforme apresentado nas equações (3.47), (3.48) e (3.49) para vigas, treliça e pórticos planos, respectivamente.

$$\begin{aligned}
[K_L] &= [K_G] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{2PI_z(72\Omega_y^2 + 12\Omega_y - 1)}{AL(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{2PI_z(72\Omega_y^2 + 12\Omega_y - 1)}{AL(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

As incógnitas P , L , E , I_z , A e Ω_y representam, respectivamente, a carga equivalente atuante, o comprimento do elemento, o módulo de elasticidade do material que o compõe e a inércia no eixo z da seção transversal, a área da seção transversal e parâmetro auxiliar para caracterização de elementos de barra no plano xy : $\Omega_y = EI_z/XGAL^2$ (Onde: X = fator de soma que define a área efetiva para cisalhamento e G o módulo de cisalhamento do material)

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & -\frac{M_{z1}}{L} & -\frac{P}{L} & -\frac{M_{z2}}{L} \\ -\frac{M_{z1}}{L} & 0 & \frac{M_{z1}}{L} & 0 \\ \frac{P}{L} & \frac{M_{z1}}{L} & \frac{P}{L} & \frac{M_{z2}}{L} \\ -\frac{M_{z2}}{L} & 0 & \frac{M_{z2}}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

As incógnitas L , E , A , P , M_{z1} e M_{z2} representam, respectivamente, o comprimento do elemento, o módulo de elasticidade do material que o compõe, a área da seção transversal, a carga atuante, o momento fletor na extremidade inicial da barra (em

torno do eixo local z) e a carga atuante, o momento fletor na extremidade final da barra (em torno do eixo local z).

$$\begin{aligned}
 & [K_L] \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(12\Omega_y + 1)} & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & -\frac{2EI_z(6\Omega_y - 1)}{L(12\Omega_y + 1)} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(12\Omega_y + 1)} & \frac{4EI_z(3\Omega_y + 1)}{L(12\Omega_y + 1)} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_{z1}}{L} \\ 0 & \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{M_{z1}}{L} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{z1}}{L} \\ 0 & -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{M_{z2}}{L} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{2PI_z(72\Omega_y^2 + 12\Omega_y - 1)}{AL(12\Omega_y + 1)^2} \\ -\frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_{z2}}{L} \\ 0 & -\frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{M_{z1}}{L} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{LP(360\Omega_y^2 + 60\Omega_y + 1)}{30(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{2PI_z(72\Omega_y^2 + 12\Omega_y - 1)}{AL(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_{z2}}{L} \\ 0 & \frac{6P(120\Omega_y^2 + 20\Omega_y + 1)}{5L(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} \\ \frac{M_{z2}}{L} & -\frac{P}{10(12\Omega_y + 1)^2} - \frac{6PI_z}{AL^2(12\Omega_y + 1)^2} & \frac{2LP(90\Omega_y^2 + 15\Omega_y + 1)}{15(12\Omega_y + 1)^2} + \frac{12PI_z}{AL^3(12\Omega_y + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

As incógnitas presentes na equação (3.49) são as mesmas já apresentadas nas equações (3.47) e (3.48).

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados os testes realizados em 7 tipos de estruturas que foram analisadas utilizando o programa computacional “NUMA-FT”, *Numerical Analysis of Trusses and Frames* (RANGEL, 2019), capaz de realizar uma análise não-linear geométrica de estruturas. Este programa apresenta a peculiaridade de permitir que o usuário escolha algumas condições a serem utilizadas na análise, como descrições cinemáticas, teorias da flexão, consideração ou não de termos de ordem elevada, entre outros. Os resultados obtidos foram comparados entre si.

As análises realizadas utilizaram como base a teoria da flexão de Timoshenko, uma vez que, por considerar os efeitos causados pelas forças de cisalhamento, de modo geral levam a resultados mais próximos da descrição final do problema, principalmente para estruturas com um baixo índice de esbeltez (L/h), como se observará, principalmente, para $L/h \leq 4$.

No que diz respeito a descrição cinemática considerada, os testes foram feitos considerando a formulação Lagrangeana atualizada e Corrotacional. Dentro da Lagrangeana atualizada foram criadas ainda duas subdivisões de testes com base na consideração ou não de termos de ordem elevada no tensor de deformação. Desta forma, resultaram 3 tipos de análises: “Corrotacional”, “large” e “small”, que correspondem, respectivamente, a utilização da formulação corrotacional, utilização da formulação Lagrangeana atualizada com a presença de termos de ordem elevada no tensor de deformação e utilização da formulação Lagrangeana atualizada sem a presença de termos de ordem elevada no tensor de deformação.

Realiza-se para cada tipo de estrutura a análise de 4 casos, cada um como uma seção transversal diferente de maneira que a estrutura fosse estudada com esbeltezes diferentes, adotadas como $L/H = 2$, $L/H = 4$, $L/H = 6$ e $L/H = 10$ nas rotinas de testes.

As análises também foram realizadas para a estrutura com cada barra discretizada em 2 elementos e em 5 elementos, de modo a observar a influência da discretização da estrutura no resultado encontrado. Adotou-se 5 elementos como uma discretização considerada boa uma vez que, durante os testes realizados no presente estudo, percebeu-se que, a partir deste valor, o aumento da discretização não gerava uma solução significativamente diferente.

Adota-se uma análise de referência para comparação com as análises realizadas conforme descrito anteriormente. Esta análise de referência é feita utilizando a teoria de flexão de Timoshenko, formulação corrotacional e discretização das barras em 10 elementos e foi identificada como “*Reference*”.

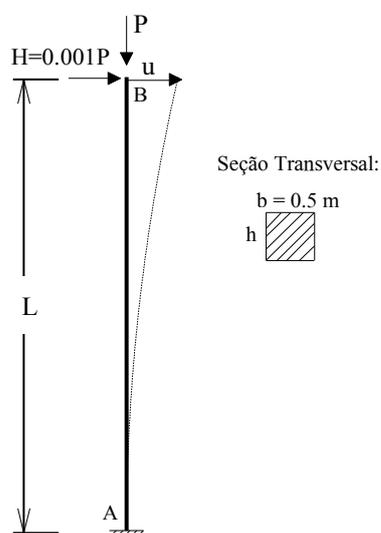
Os resultados são dispostos em curvas de equilíbrio, fator de carga (adimensional) versus deslocamento (metro ou radiano), onde o fator de carga diz respeito a relação entre a carga aplicada e a carga crítica e o deslocamento a translação (em metros) ou rotação (em radianos) do grau de liberdade analisado. Em geral as cargas aplicadas foram escolhidas de modo que o ponto crítico da curva ocorresse para um fator de carga igual a 1, ou seja, a carga aplicada corresponde a carga crítica de flambagem da estrutura. Essas cargas foram definidas numericamente.

O limite estabelecido para desenvolvimento das curvas de equilíbrio foi definido para cada exemplo, de maneira que fosse possível considerar a parte da zona pós-crítica da curva de equilíbrio sem comprometer a análise.

4.1 Coluna engastada

A coluna engastada é uma estrutura que se caracteriza pela presença de um apoio do terceiro gênero em uma de suas extremidades e na outra a aplicação de uma carga vertical P e uma carga horizontal desestabilizadora correspondente a $0,001P$. A estrutura é apresentada na figura 4.1.

Figura 4.1. Coluna engastada

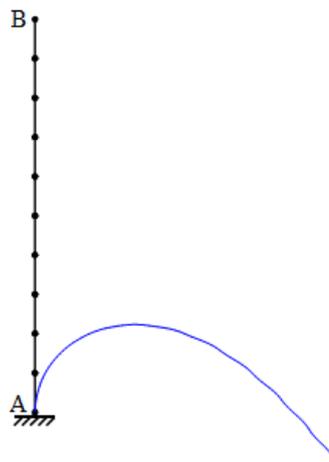


FONTE: Adaptado de Silva (2016)

O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$), fator de forma ($\chi = 5/6$) para seção transversal retangular, e o comprimento (L) da coluna é igual a 1 m.

A configuração deformada da estrutura é apresentada na figura 4.2 para a condição de $L/H = 6$, utilizando a formulação corrotacional e discretização da estrutura em 10 elementos (resposta de referência). A linha azul representa a configuração deformada, enquanto a linha preta corresponde à configuração original da estrutura.

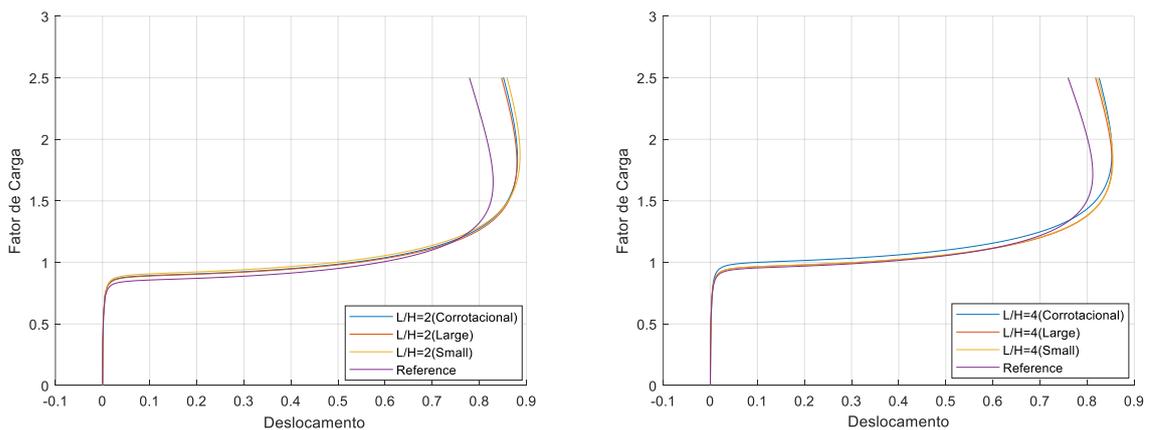
Figura 4.2. Configuração deformada da coluna engastada

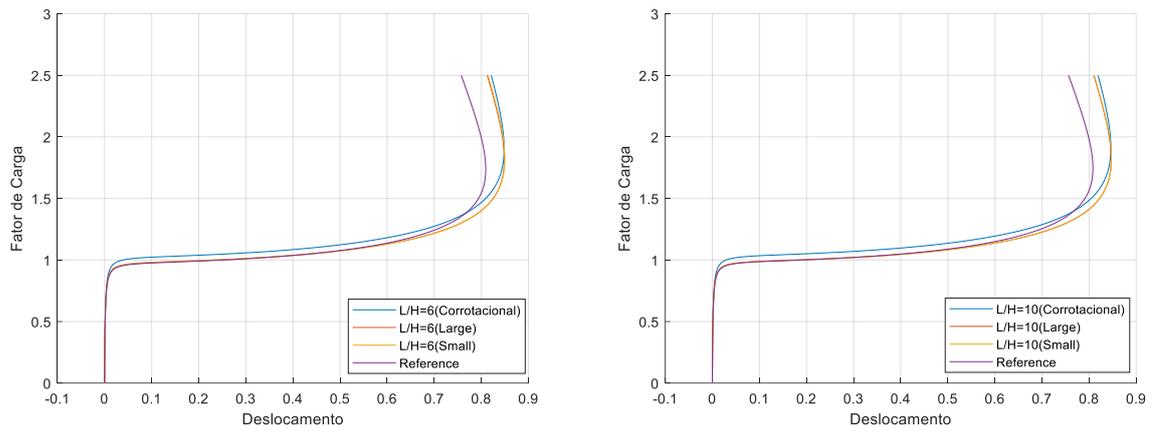


FONTE: Autor (2022)

O grau de liberdade levado em conta na análise é a translação horizontal no nó B. Os resultados das análises realizadas são apresentados nos gráficos 4.1 e 4.2, que demonstram as análises considerando a descrição do pilar em 2 e 5 elementos, respectivamente.

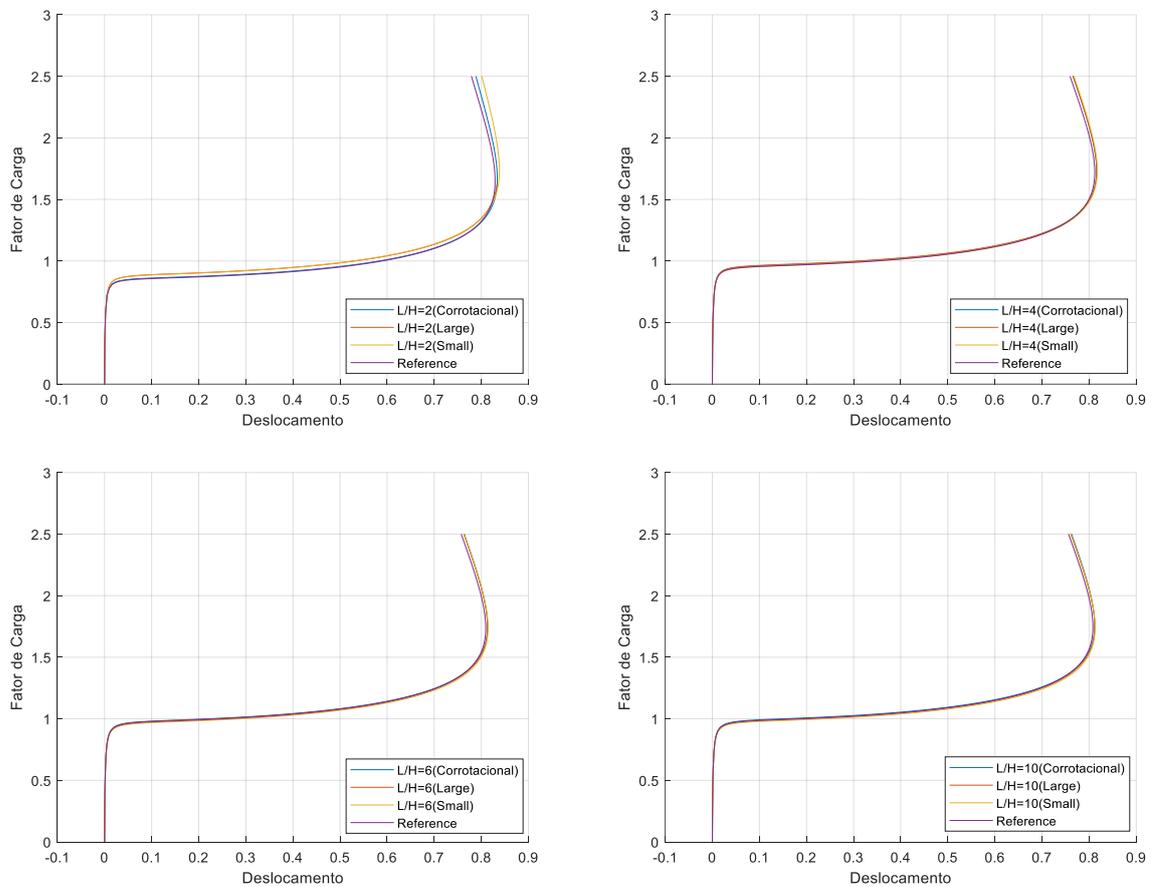
Gráfico 4.1. Curva de equilíbrio para coluna engastada discretizada em 2 elementos





FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.2. Curva de equilíbrio para coluna engastada discretizada em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

Pela análise dos resultados apresentados, pode-se notar que, para o caso da discretização em 2 elementos, a análise utilizando a formulação Lagrangeana atualizada com termos de alta ordem (“large”) se mantém mais perto da referência no início da curva de equilíbrio. Na zona pós-crítica, a análise com a formulação Lagrangeana atualizada possui melhor aproximação para maiores índices de esbeltez. Para o caso da análise com discretização em 5 elementos, as três curvas tendem a se manter próximas da referência, sendo as curvas “large” e corrotacional as com melhor aproximação. Todavia, destaca-se que o número de passos do processo iterativo utilizado para atingir os resultados foram muito maiores para o teste envolvendo a formulação “large”, sendo cerca de 2000 passos e tempo de processamento de 21 segundos, enquanto as demais utilizaram cerca de 90 passos e menos de 2 segundos.

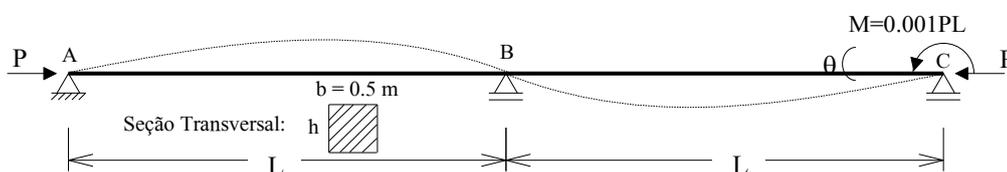
Observa-se que a discretização da estrutura exerce grande influência nos resultados da análise, principalmente na zona pós-crítica da curva de equilíbrio. Percebe-se que os resultados obtidos para a estrutura mais discretizada se aproximam mais da referência.

Analisando a presença de termos de ordem elevada, nota-se em todos os exemplos que a análise utilizando a formulação “large”, com termos de alta ordem, tende a se manter mais próxima da referência do que a utilizando a formulação “small”, sem termos de ordem elevada.

4.2 Viga contínua

A segunda rotina de testes teve como base a estrutura apresentada na figura 4.3, com $L = 1$ m. Essa viga se caracteriza pela presença de um apoio do segundo gênero no nó A e dois de primeiro gênero nos nós B e C. O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma (χ) igual a 5/6 para a seção transversal.

Figura 4.3. Viga contínua

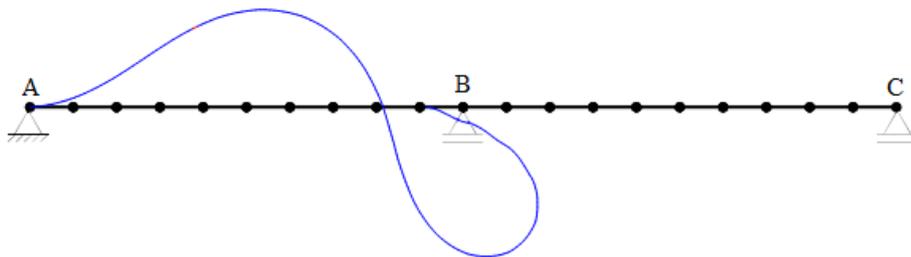


FONTE: Adaptado de Timoshenko e Gere (1963)

O valor da carga crítica P foi obtido numericamente e varia de acordo com a esbelteza analisada. Para análise não-linear, o grau de liberdade analisado é a rotação do nó C.

A análise efetuada leva a estrutura a condições extremas, após os estados limites último e de serviço, sendo avaliado também o comportamento da curva de equilíbrio no estado pós-crítico. Nessa condição, a deformação da estrutura é de tal magnitude que a mesma perde completamente sua função e forma, conforme apresentado na figura 4.4, que representa essa situação para $L/H = 6$, formulação corrotacional e discretização de 10 elementos por barra. Na figura a configuração deformada é demarcada em azul, enquanto em preto se tem a configuração original da estrutura.

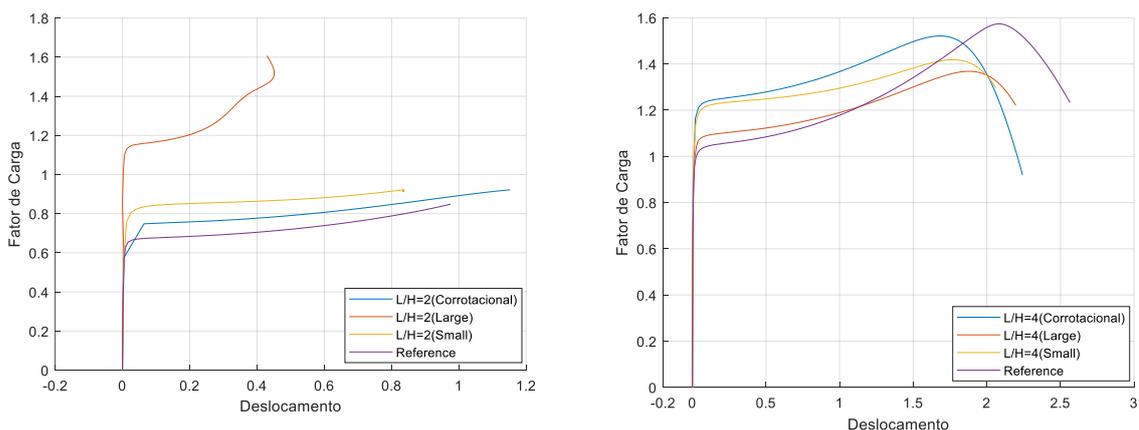
Figura 4.4. Configuração deformada da viga contínua

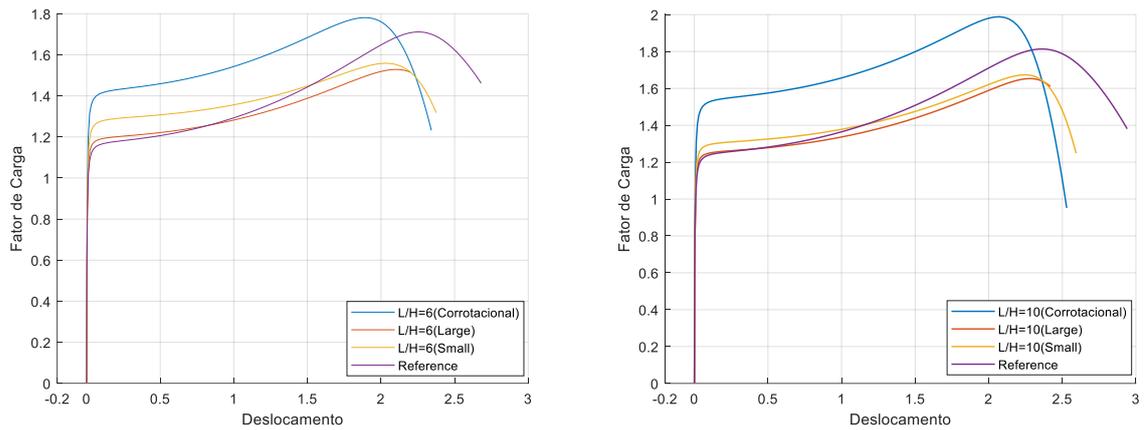


FONTE: Autor (2022)

Os resultados das análises realizadas são apresentados no conjunto de gráficos 4.3 e 4.4, que demonstram as análises considerando a discretização de cada barra em 2 e 5 elementos, respectivamente.

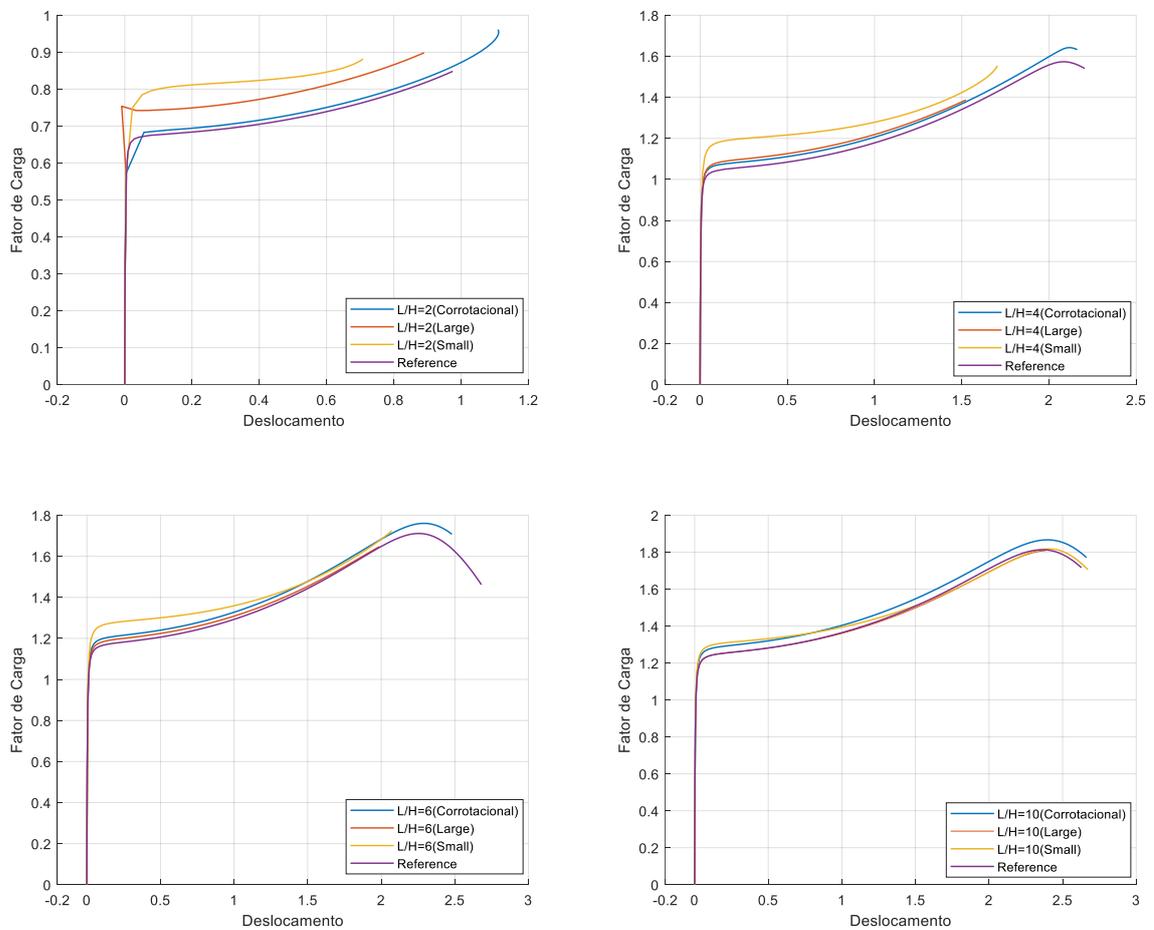
Gráfico 4.3. Curva de equilíbrio para de viga contínua com barras discretizadas em 2 elementos





FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.4. Curva de equilíbrio para viga contínua com barras discretizadas em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

Observando-se as curvas traçadas pode-se perceber que a discretização da estrutura influencia significativamente nos resultados obtidos, de modo que uma estrutura mais

discretizada faz com que as curvas de equilíbrio para os 3 casos, “large” (curva vermelha), corrotacional (curva azul) e “small” (curva amarela), se aproximem mais da referência (curva roxa).

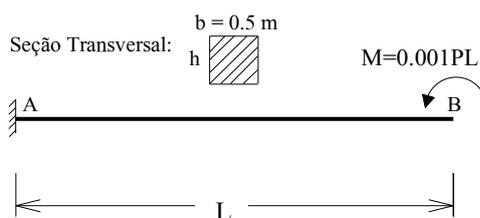
Analisando a influência da descrição cinemática escolhida, verifica-se que para a estrutura menos discretizada, a formulação lagrangeana (“large” e “small”), tendem a se aproximar mais da curva de referência que a formulação corrotacional. Já na estrutura mais discretizada, essa informação se fez dependente da esbeltez da estrutura. Nas seções menos esbeltas a formulação corrotacional encontra-se mais próxima da referência, enquanto que para esbeltezes maiores a Lagrangeana atualizada com termos de ordem elevada possui melhor aproximação.

Considerando a presença ou não de termos de ordem elevada, observa-se que para praticamente todos os casos, a formulação Lagrangeana com termos de alta ordem (“large”) se manteve mais próxima da referência do que sem a consideração destes termos (“small”). A única exceção apresentada foi no caso de $L/H = 2$ e discretização de dois elementos que a curva “large” apresentou uma configuração distante do esperado.

4.3 Viga engastada–livre

A terceira rotina de teste analisou a estrutura de uma viga engastada–livre com $L = 1$ m, caracterizada apenas pela presença de um apoio do terceiro gênero em uma de suas extremidades e na outra uma carga de momento de flexão, conforme apresentado na figura 4.5.

Figura 4.5. Viga engastada–livre

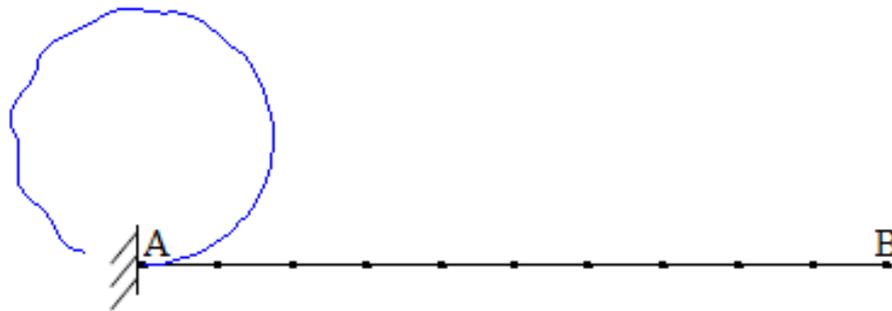


FONTE: Autor (2022)

O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma (χ) de $5/6$ para a seção transversal.

O valor do momento M aplicado à estrutura foi avaliado numericamente e varia de acordo com a esbelteza analisada. Para análise não-linear, o grau de liberdade estudado é a translação vertical em B. A configuração deformada da estrutura considerando discretização de 5 elementos da barra, $L/H = 6$ e formulação corrotacional é apresentada na figura 4.6.

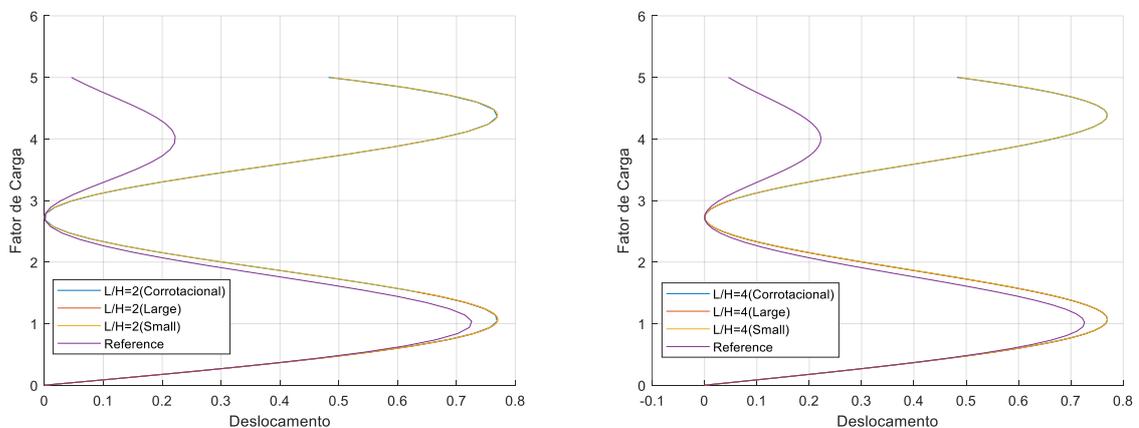
Figura 4.6. Configuração deformada da viga engastada–livre

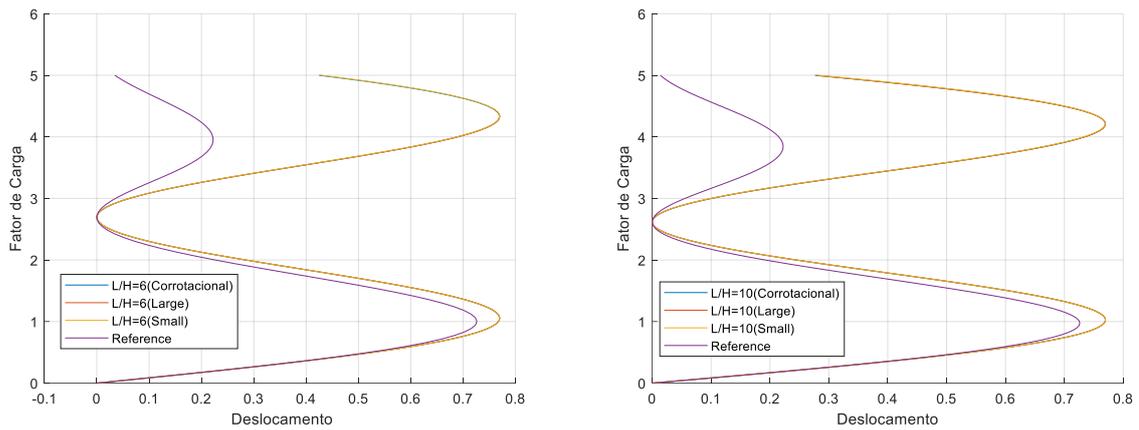


FONTE: Autor (2022)

São apresentados no conjunto de gráficos 4.5 e 4.6 os resultados das análises realizadas, que demonstram as análises considerando a descrição de cada barra em 2 e 5 elementos, respectivamente.

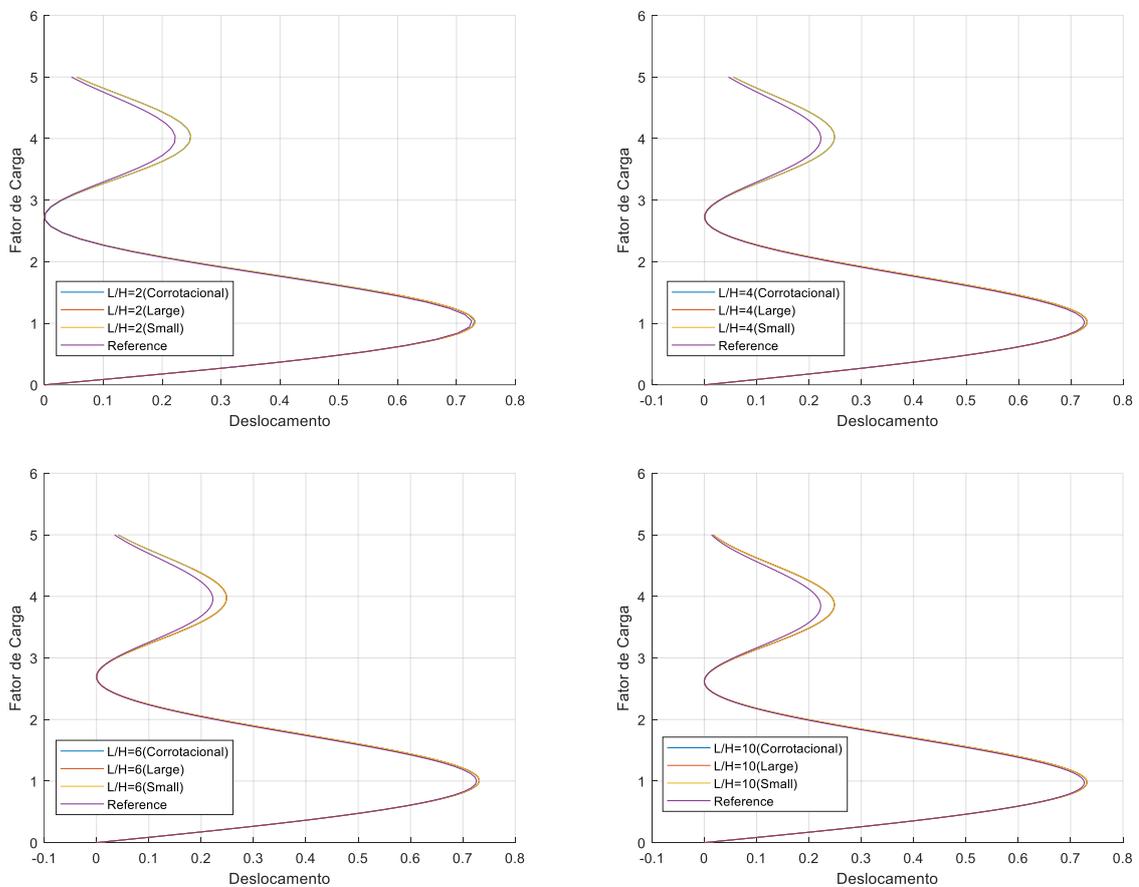
Gráfico 4.5. Curva de equilíbrio para barra da viga engastada–livre discretizada em 2 elementos





FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.6. Curva de equilíbrio para barra da viga engastada – livre discretizada em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

A partir dos resultados expressos nos gráficos 4.5 e 4.6, pode-se verificar que tanto na discretização das barras em 2 elementos, como na discretização das mesmas em

5 elementos, os resultados da análise pelas três formulações propostas, “large”, “small” e corrotacional, praticamente se sobrepõem, de modo que as diferenças do uso das mesmas não sejam significantes.

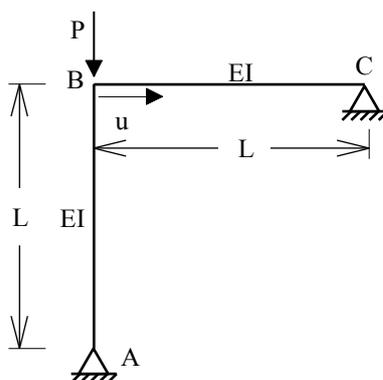
Observa-se que para uma mesma discretização, as curvas não se aproximaram mais ou menos da referência ao se variar a esbeltez da estrutura. Nota-se, porém, que na discretização com 5 elementos os resultados das análises se aproximam mais da referência, estando quase que sobrepostos nesta. Já para a discretização de 2 elementos, este mesmo fenômeno pôde ser observado no início da curva de equilíbrio, mas à medida que se avança no estado pós crítico, as diferenças se tornam mais expressivas.

Ressalta-se que a formulação com termos de ordem elevada apresentou tempo de processamento e número de passos dados para alcance de um mesmo fator de carga significativamente superior, quando comparada com as demais, com número de passos 20 vezes maior que para as demais curvas e tempo de processamento 15 vezes maior. Este comportamento se acentua à medida que se avança no estado pós-crítico.

4.4 Pórtico de Roorda

Na quarta rotina de testes implementou-se ao programa a estrutura do pórtico de Roorda (ROORDA, 1965), mostrado na figura 4.7, caracterizada pela presença de dois apoios do segundo gênero em A e C e uma carga P aplicada em B.

Figura 4.7. Pórtico de Roorda

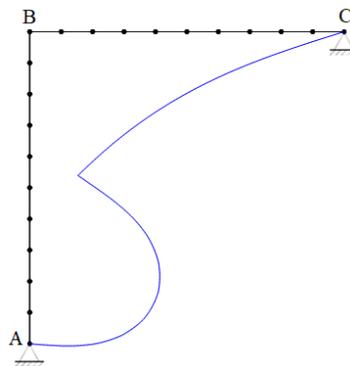


FONTE: Adaptado de Rodrigues (2019)

O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², comprimento $L = 1$ m, coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma (χ) de 5/6 para a seção transversal. O valor da carga crítica P foi avaliado numericamente e varia de acordo com a esbeltez analisada. Para a análise não-linear geométrica, o grau de liberdade analisado é a translação em B, conforme ilustrado na figura 4.7 pelo vetor u .

A configuração deformada da estrutura é apresentada na figura 4.8 para o caso de $L/H = 6$, com utilização da formulação corrotacional e discretização de 10 elementos por barra. Na figura, a configuração deformada é demarcada em azul, enquanto em preto se tem a configuração original da estrutura.

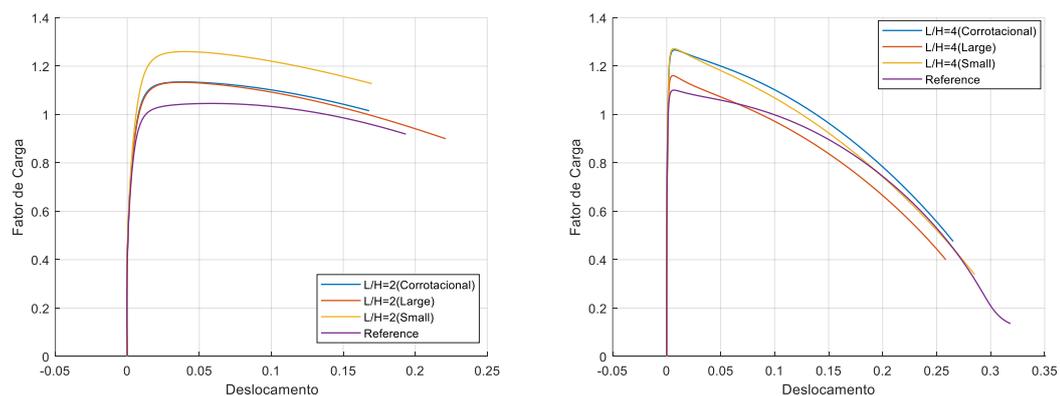
Figura 4.8. Configuração deformada do pórtico de Roorda

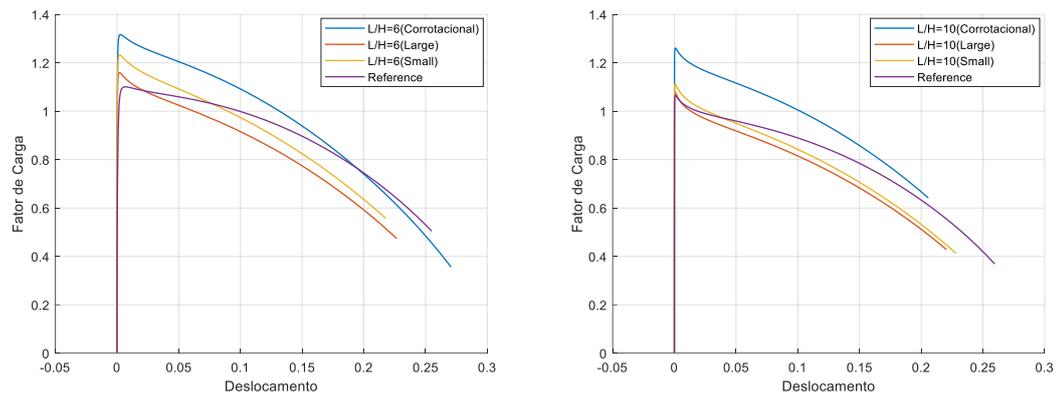


FONTE: Autor (2022)

Os resultados das análises realizadas são apresentados no conjunto de gráficos 4.7 e 4.8, que demonstram as análises considerando a descrição de cada barra em 2 e 5 elementos, respectivamente.

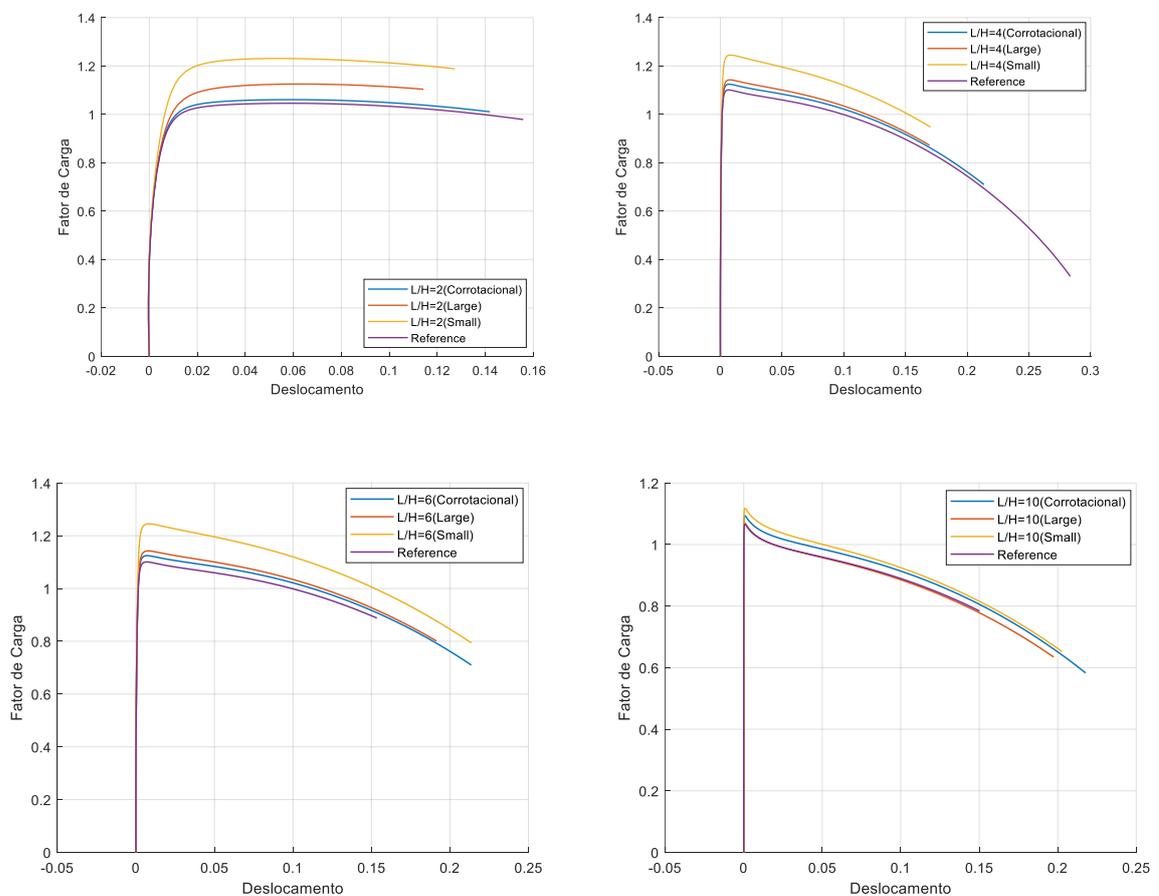
Gráfico 4.7. Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Roorda discretizadas em 2 elementos





FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.8. Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Roorda discretizadas em 5 elementos

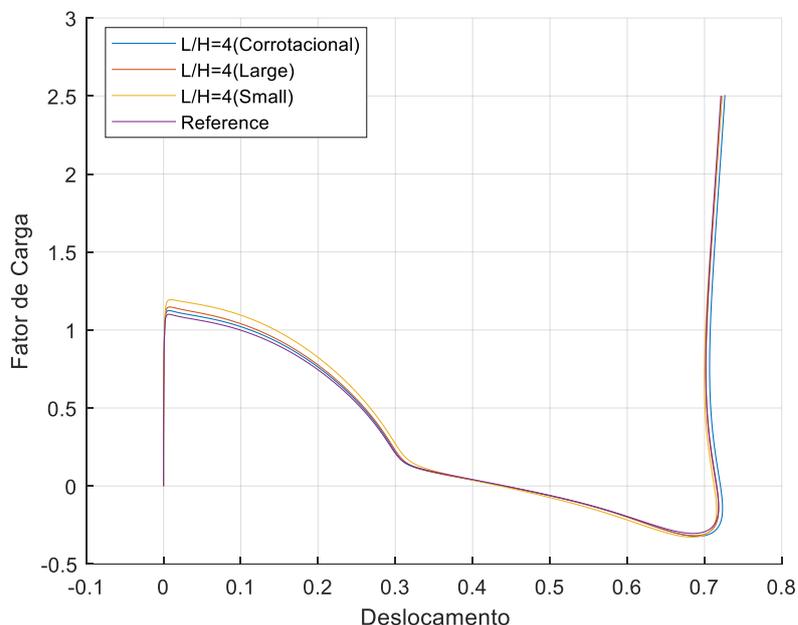


FONTE: Autor (2022)

Com o intuito de uma análise mais precisa e representativa do comportamento na zona secundária da curva de equilíbrio, realizou-se uma análise mais profunda para o

caso específico de $L/H = 4$ e discretização das barras em 5 elementos, desenvolvendo mais a curva de equilíbrio nesta zona, conforme apresentado no gráfico 4.9.

Gráfico 4.9. Curva de equilíbrio para $L/H = 4$ e barras do pórtico de Roorda discretizadas em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

Pela análise dos exemplos anteriores é possível perceber que, no caso da descrição das barras em dois elementos, nenhuma das três formulações se aproxima da curva de referência em sua integridade. De modo geral pode-se dizer que a utilização da formulação Lagrangeana com termos de alta ordem (“large”) traz resultados mais próximos da referência no início da curva de equilíbrio, mas cada vez que se ingressa mais na zona pós-crítica a curva com a utilização da formulação corrotacional possui melhor aproximação. No caso específico de $L/H=2$ a curva corrotacional e “large” permanecem praticamente juntas.

Observando-se os resultados do gráfico 4.8, para o caso da discretização de 5 elementos, percebe-se que a curva corrotacional se mantém mais próxima da referência em todos os casos, com exceção da seção mais esbelta ($L/H=10$), em que a formulação “large” se mostra mais próxima. Todavia, ao observar a curva mais desenvolvida no gráfico 4.9, observa-se que formulação “large” (Lagrangeana com termos de ordem elevada) se mantém próxima da referência na zona crítica, chegando a se aproximar mais do que a curva corrotacional nas partes mais avançadas da curva.

Entretanto, destaca-se que a curva com a utilização da formulação corrotacional se mantém suficientemente próxima da referência.

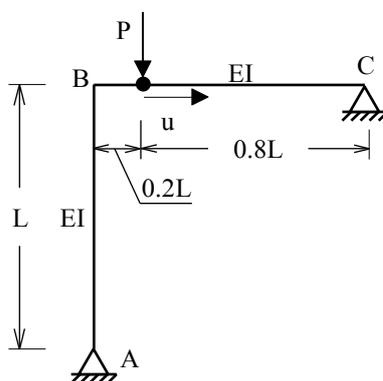
No que diz respeito à utilização de termos de ordem elevada no tensor de deformação, observa-se que para a discretização com 5 elementos, a consideração destes termos traz resultados significativamente mais próximos da referência. No caso da discretização de 2 elementos, a utilização destes termos não garante um melhor resultado da estrutura na fase pós-crítica, contudo apresenta melhor aproximação da carga crítica. Na fase pré-crítica as curvas se sobrepõem.

4.5 Pórtico de Lee

Nesta rotina de testes, a estrutura, o pórtico de Lee (LEE, 1968) apresenta grande similaridade com a da rotina de testes anterior, todavia se difere pela aplicação da carga distante $0,2L$ do nó C, conforme mostrado na figura 4.9. Esta estrutura se caracteriza pela presença de dois apoios do segundo gênero em A e C e a aplicação de uma carga P .

O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², comprimento $L = 1$, coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma ($\chi = 0,833$) para a seção transversal.

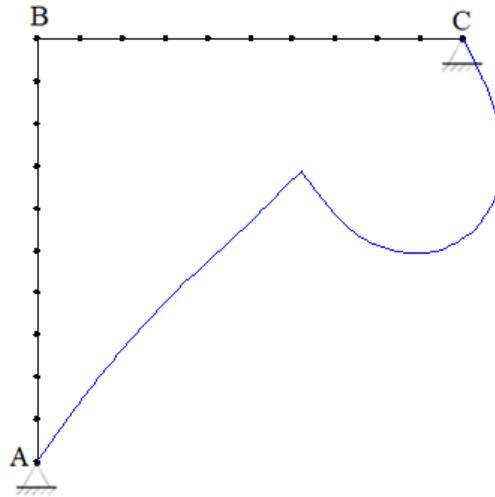
Figura 4.9. Pórtico de Lee



FONTE: Adaptado de Rangel (2019)

A figura imagem 4.10 apresenta a configuração deformada para o caso de $L/H = 6$, utilizando a formulação corrotacional e discretização de 10 elementos por barra. A configuração deformada é demarcada em azul, enquanto em preto se tem a configuração original da estrutura.

Figura 4.10. Configuração deformada do pórtico de Lee

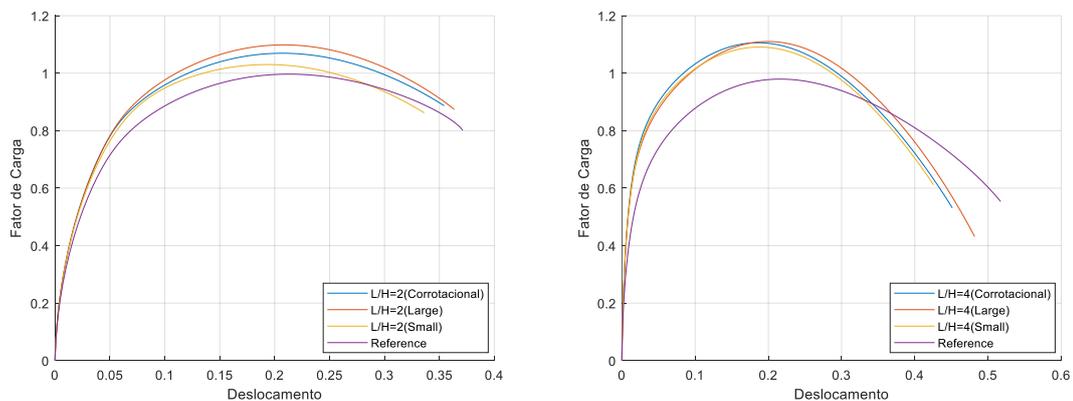


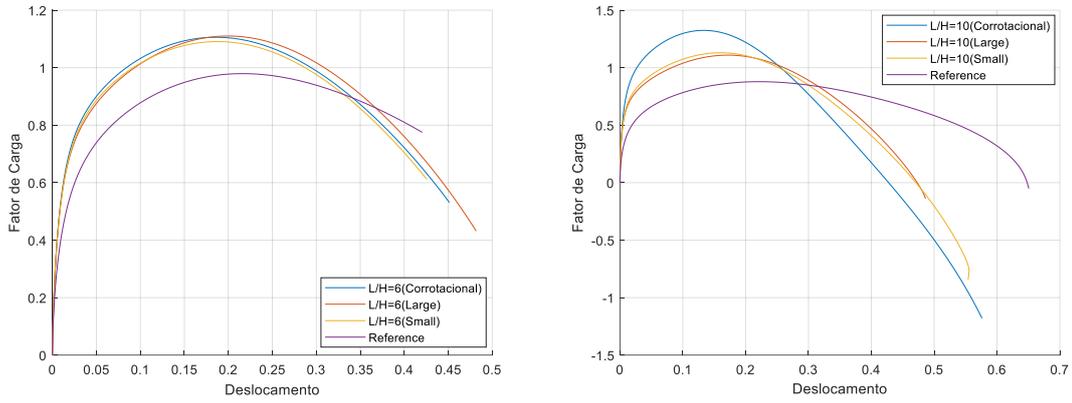
FONTE: Autor (2022)

O conjunto de gráficos 4.10 e 4.11 contém os resultados das análises realizadas, considerando a descrição de cada barra em 2 e 5 elementos, respectivamente.

Assim como feito para o conjunto de testes anterior, realizou-se uma análise mais profunda para o caso específico de $L/H = 4$ e discretização das barras em 5 elementos, desenvolvendo mais a curva de equilíbrio nesta zona, conforme apresentado no gráfico 4.12.

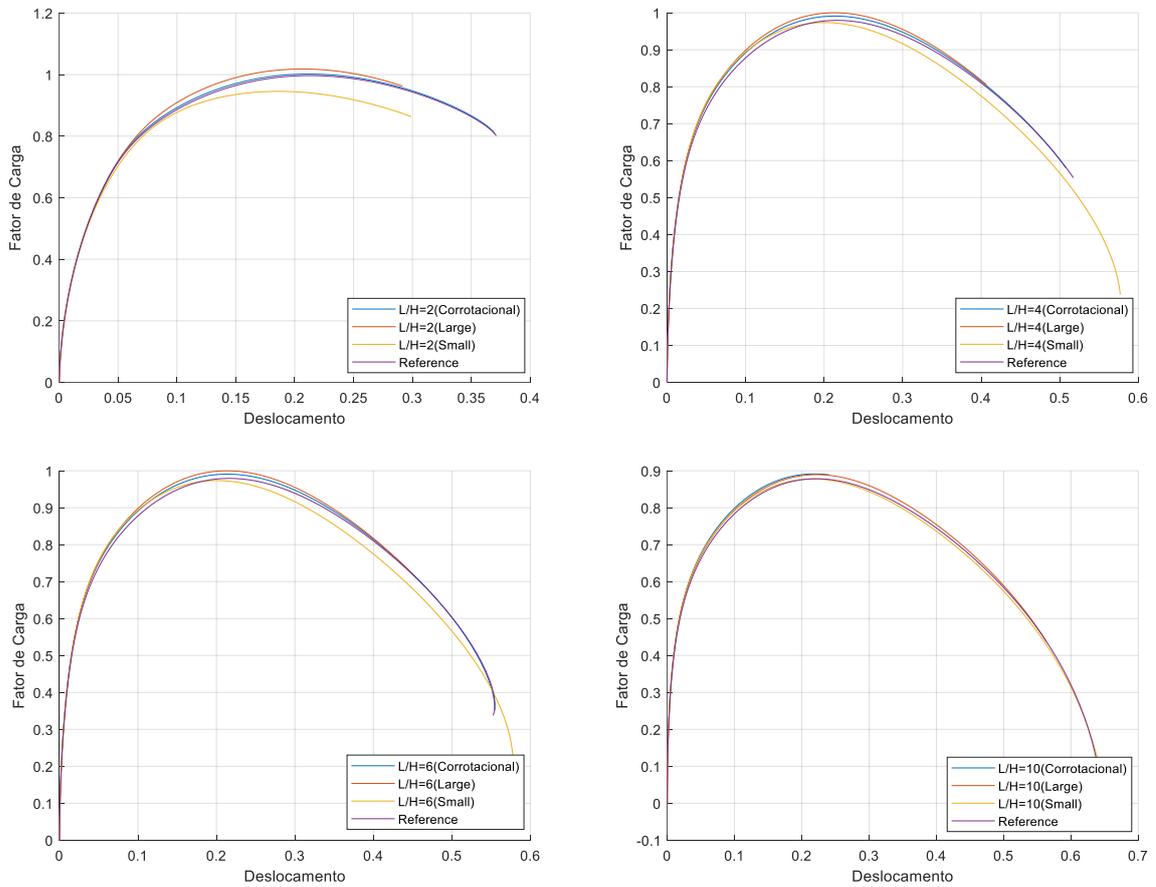
Gráfico 4.10. Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Lee discretizadas em 2 elementos





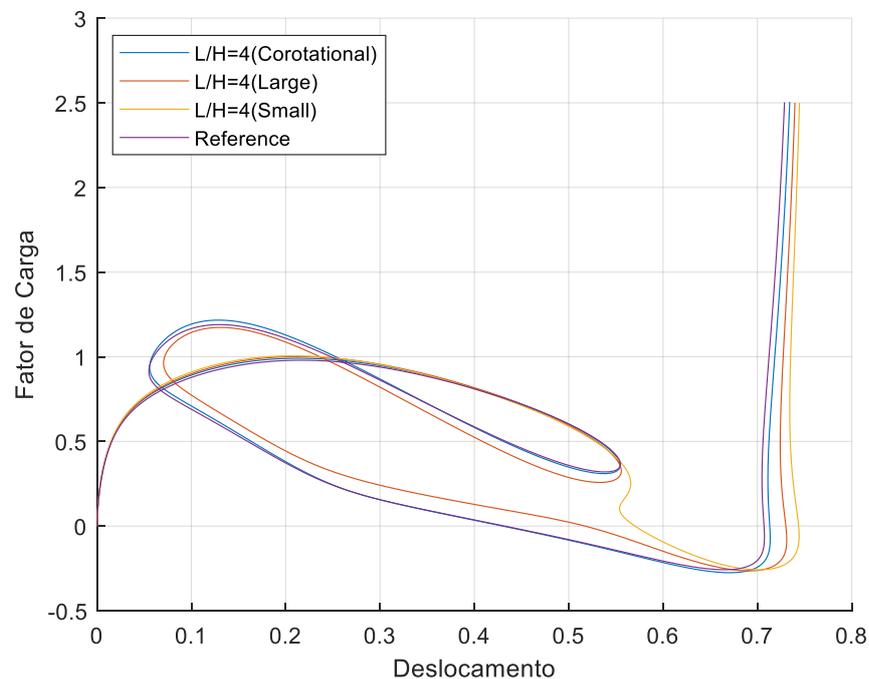
FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.11. Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Lee discretizadas em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.12. Curva de equilíbrio para $L/H = 4$ e barras do pórtico de Lee discretizadas em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

Através dos resultados apresentados nos gráficos anteriores pode-se observar que para a discretização das barras da estrutura em dois elementos, as 3 análises feitas se mantiveram próximas umas das outras, mas fiéis a referência apenas na zona fundamental da curva. Ao ingressar na zona pós-crítica, as mesmas se distanciaram da referência e nenhuma se aproximou significativamente da curva.

Já para o caso de 5 elementos, pode-se observar que as 3 análises feitas se aproximaram bastante da referência, destacando os efeitos de uma maior discretização da estrutura, todavia, a formulação corrotacional e a Lagrangeana com termos de alta ordem se aproximaram mais, estando a corrotacional mais próxima da referência.

Destaca-se que em certo ponto da curva mais desenvolvida, oriunda da utilização da formulação lagrangeana sem a presença de termos de ordem elevada (“small”), observou-se a ocorrência do fenômeno de snap-back, um salto dinâmico sob controle de deslocamento, conforme abordado no capítulo 3. Desta maneira, parte da curva de

equilíbrio não foi representada pela utilização deste modelo. Ressalta-se que as curvas oriundas da utilização da formulação corrotacional e lagrangeana com termos de ordem elevada não apresentaram tal fenômeno, descrevendo o comportamento de modo mais fiel à referência.

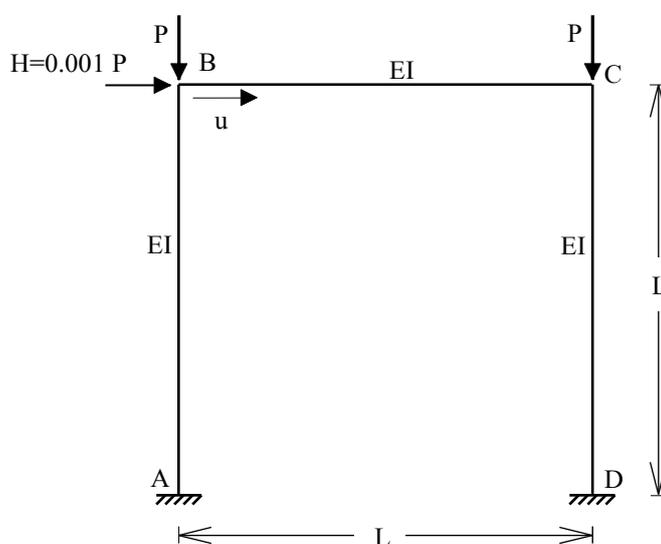
No que diz respeito a utilização de termos de alta ordem, no caso da estrutura com barras discretizada em 5 elementos, a formulação com a consideração destes termos, “large”, se aproxima mais da referência, do que aquela sem os mesmos, “small”. Para o caso da discretização em 2 elementos tem-se dificuldade de análise visto que os 3 testes realizados não se aproximaram tanto da referência.

4.6 Pórtico plano

A sexta rotina de testes consiste na implementação ao programa de um pórtico com bases engastadas. Tal estrutura é carregada por duas cargas verticais nos nós superiores e uma carga horizontal no nó superior esquerdo, conforme mostrado na figura 4.11.

O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², comprimento $L = 1$ m, coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma (χ) igual a 5/6 para a seção transversal.

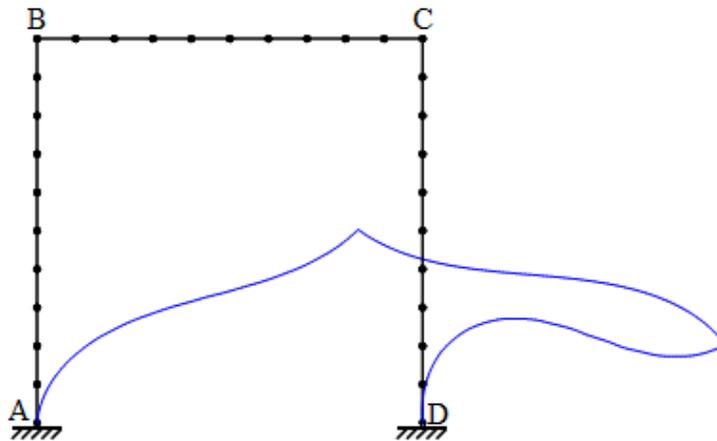
Figura 4.11. Pórtico plano



FONTE: Adaptado de Bazant e Cedolin (2010)

A configuração deformada da estrutura é apresentada na figura 4.12 para o caso de $L/H = 6$, utilizando a formulação corrotacional e discretização de 10 elementos por barra. A configuração deformada é demarcada em azul, enquanto em preto se tem a configuração original da estrutura.

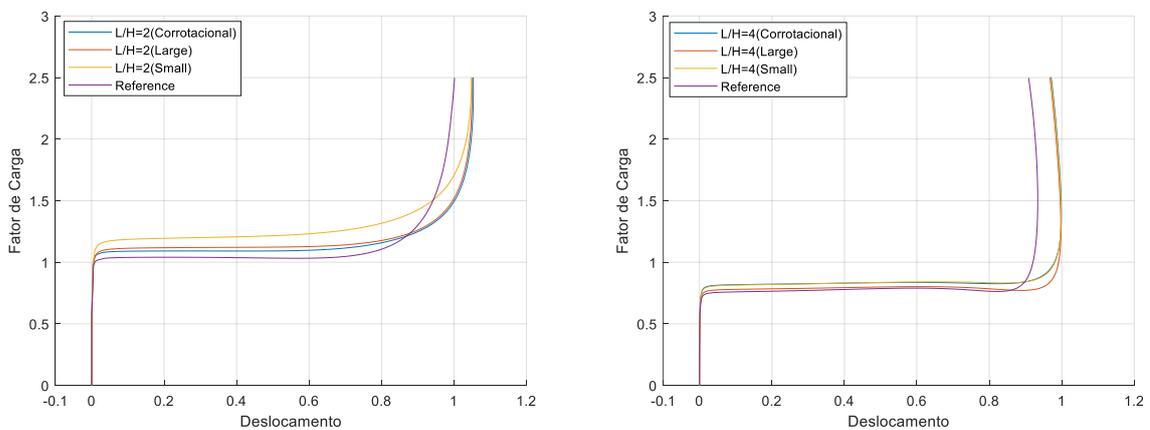
Figura 4.12. Configuração deformada do pórtico

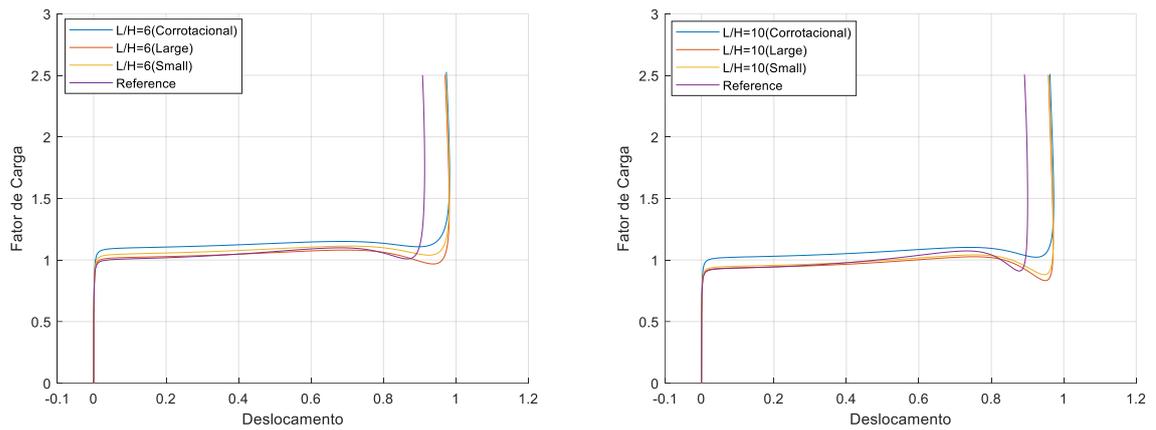


FONTE: Autor (2022)

Os resultados deste conjunto de testes são apresentados nos gráficos 4.13 e 4.14, considerando a descrição das barras da estrutura em 2 e 5 elementos, respectivamente. O grau de liberdade analisado é a translação horizontal no nó B, conforme ilustrado na figura 4.12 pelo vetor u .

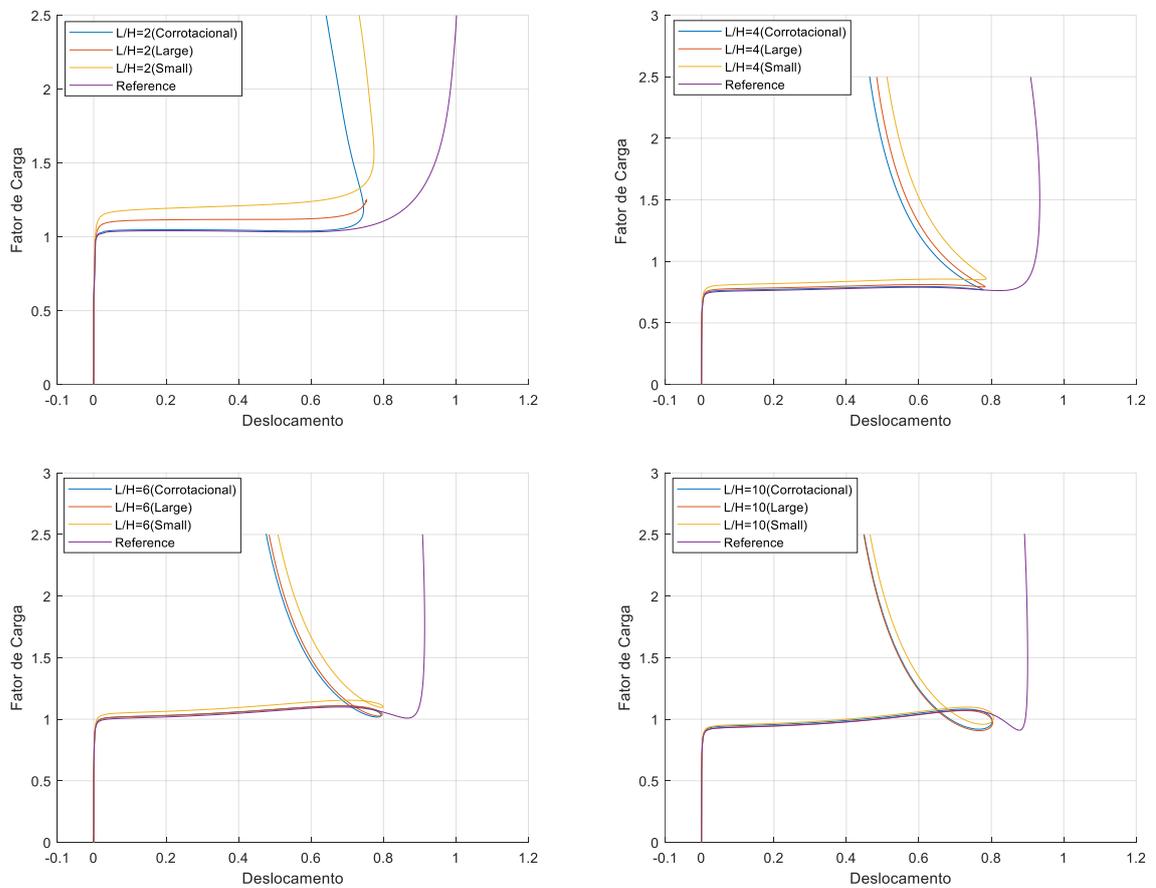
Gráfico 4.13. Curva de equilíbrio para barras do pórtico discretizadas em 2 elementos





FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.14. Curva de equilíbrio para barras do pórtico discretizadas em 5 elementos



FONTE: Autor (2022)

A partir dos gráficos apresentados anteriormente pode-se observar a influência da descrição utilizada nos resultados obtidos. Para valores de esbeltezes menores, a análise realizada utilizando a formulação corrotacional foi a que se manteve mais próxima da referência, enquanto que para esbeltezes maiores, a análise realizada utilizando a formulação Lagrangeana atualizada com termos de ordem elevada obteve melhores resultados. Esse comportamento pôde ser observado considerando a discretização das barras da estrutura em 2 e 5 elementos, todavia vale ressaltar que as diferenças entre uma curva e outra não foram tão grandes. Nota-se que, especificamente para o caso de $L/H=2$ e discretização das barras em 5 elementos, a análise utilizando a formulação “large” não atingiu convergência nos resultados e foi interrompida antes do fator de carga máximo estipulado.

À medida que o gráfico avança na zona pós-crítica pode-se observar que as curvas tendem a se distanciar da referência. Para a discretização em 2 elementos, as curvas mantem uma configuração semelhante à da curva de referência, mas com um deslocamento um pouco maior para um mesmo fator de carga. Já para o caso da estrutura mais discretizada, as curvas tendem a se direcionar para outra configuração de equilíbrio.

Avaliando a presença ou não de termos de ordem elevada, percebe-se que, de modo geral, para todos os casos a resposta da análise considerando esses termos, a partir da utilização da formulação “large”, se aproximou mais da referência. Em alguns casos, como para $L/H = 10$ e $L/H = 6$ com discretização das barras em 2 elementos, a diferença proporcionada pela consideração ou não destes termos não é tão grande, mas ainda assim existente. Nota-se que para fatores de carga elevado a formulação “small” se mostra mais próxima em alguns casos, mas, assim como a “large”, tende por um caminho que se distancia da referência.

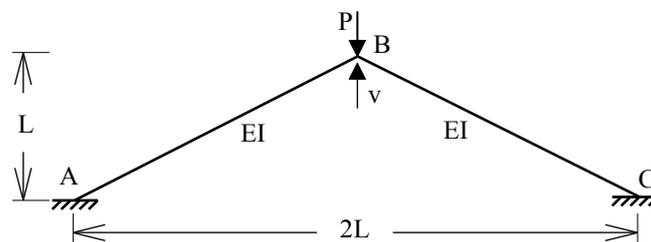
Analisando o grau de discretização das estruturas, observa-se que a estrutura mais discretizada obteve respostas mais próximas da referência no início da curva, enquanto a estrutura menos discretizada apresentou resultados mais próximos nas zonas mais avançadas da curva. Todavia, analisando a trajetória de equilíbrio, percebe-se que nessas zonas mais avançadas, a trajetória descrita tanto pela estrutura mais discretizada quanto pela menos discretizada se encaminhou para configurações distantes da referência. Assim, não se consegue, por meio deste

exemplo, concluir que uma estrutura menos discretizada nos trará resultados mais próximos da referência para maiores fatores de carga, uma vez que a trajetória não se manteve fiel a estrutura.

4.6 Pórtico de Williams adaptado

Na sétima e última rotina, analisou-se o comportamento do pórtico de Williams adaptado (WILLIAMS,1964) frente a ação de uma carga P concentrada em seu nó central, conforme apresentado na figura 4.13. Esta estrutura se caracteriza pela presença de dois apoios do terceiro gênero em A e C . O módulo de elasticidade do material é $E = 10^7$ kN/m², comprimento $L = 1$, coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) e um fator de forma ($\chi = 0,833$) para a seção transversal.

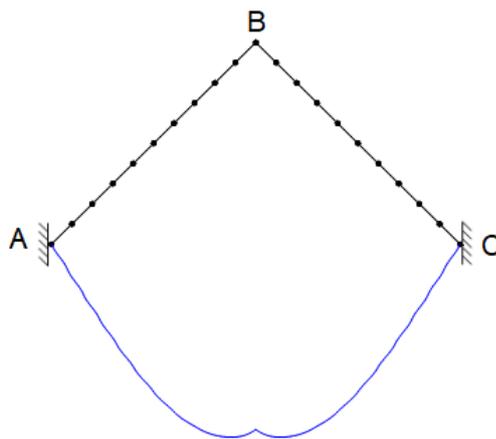
Figura 4.13. Pórtico de Williams adaptado



FONTE: Adaptado de Rangel (2019)

É apresentada na figura 4.14 a configuração deformada para o caso de $L/H = 6$, utilização da formulação corrotacional e discretização de 10 elementos por barra. A configuração deformada é demarcada em azul, enquanto em preto se tem a configuração original da estrutura.

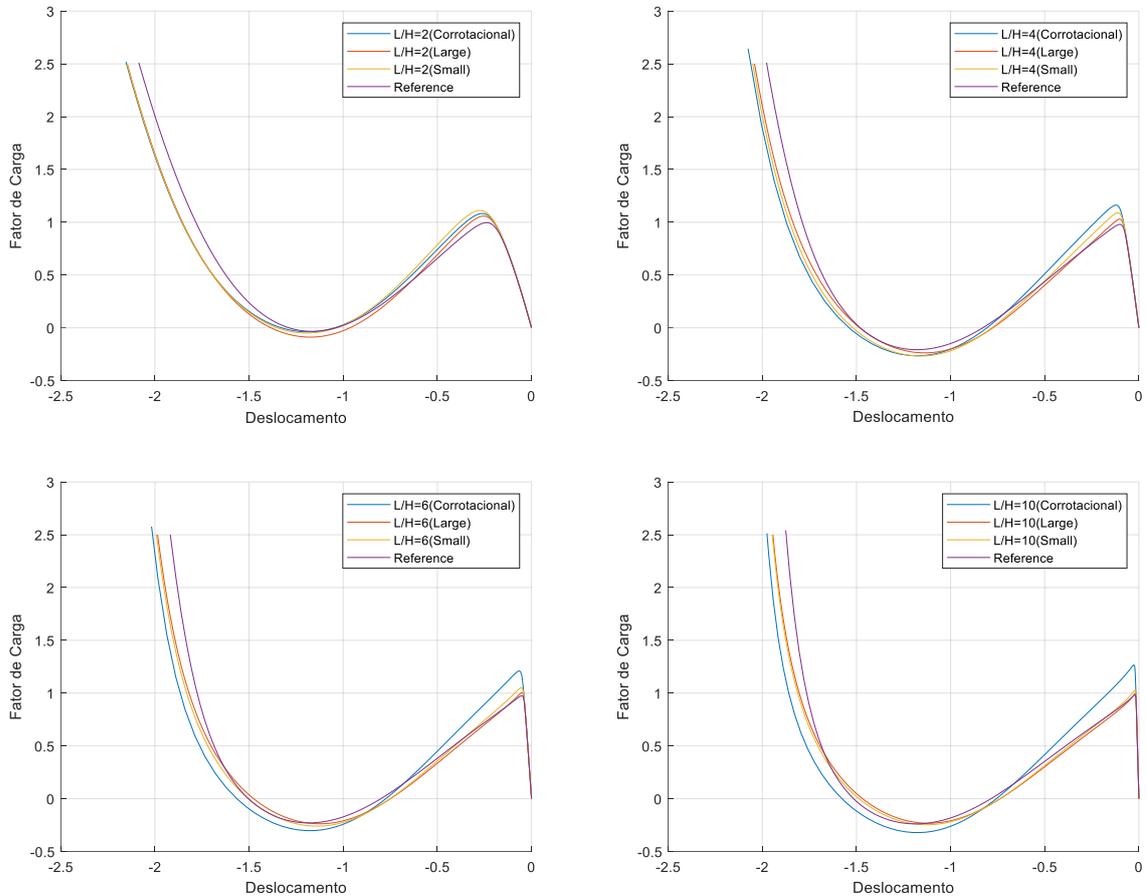
Figura 4.14. Configuração deformada do pórtico de Williams adaptado



FONTE: Autor (2022)

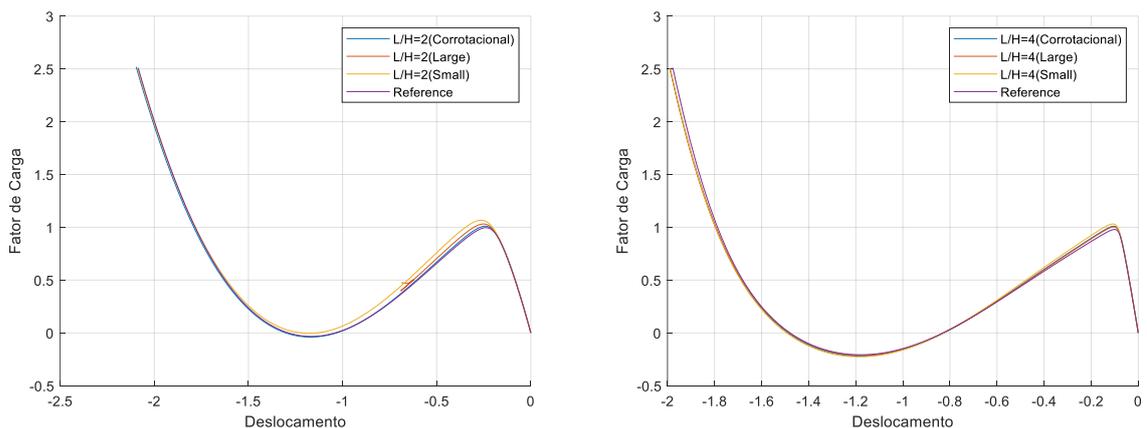
Os gráficos 4.15 e 4.16 expressam os resultados das análises realizadas, considerando a descrição de cada barra em 2 e 5 elementos, respectivamente.

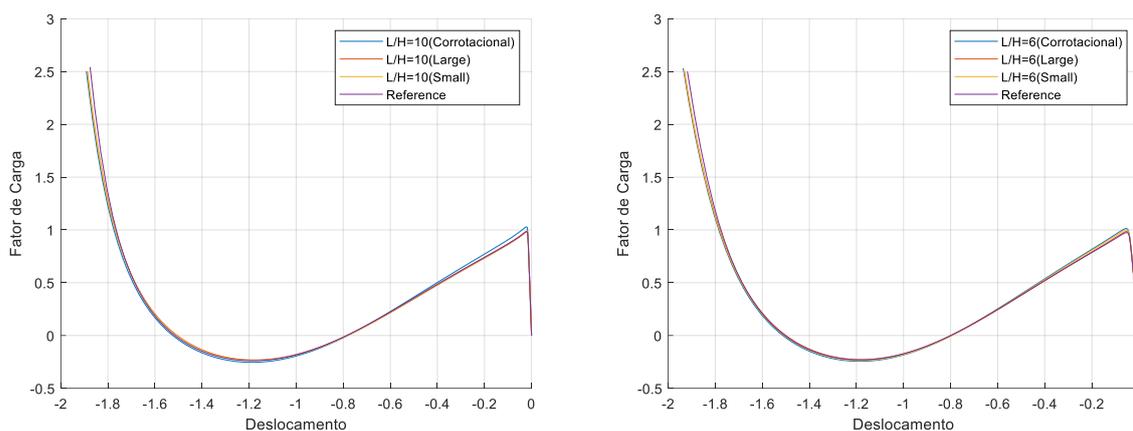
Gráfico 4.15. Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Williams adaptado discretizadas em 2 elementos



FONTE: Autor (2022)

Gráfico 4.16 Curva de equilíbrio para barras do pórtico de Williams discretizadas em 5 elementos





FONTE: Autor (2022)

A análise das curvas de equilíbrio apresentadas nos permite observar a influência das formulações utilizadas no desenvolvimento gráfico da solução.

No caso da discretização das barras em 2 elementos, pode-se claramente observar que a solução envolvendo a formulação “large” se manteve mais próxima da referência que a envolvendo a corrotacional. A formulação Lagrangeana sem termos de ordem elevada, “small”, apresentou resultados próximos as demais nos primeiros estágios da curva. Nos estágios mais avançados, ainda que próxima, esta se manteve mais distante que a “large”, porém mais próxima que a corrotacional.

Para o caso da discretização em 5 elementos, a formulação corrotacional e “large” se mostram eficazes, se mantendo bem próximas da referência. Dentre elas a formulação lagrangeana com termos de ordem elevada se destaca pela sua maior proximidade da referência, todavia, destaca-se ainda pelo maior tempo de processamento e necessidade de maior número de passos do processo iterativo para alcançar os resultados apresentados. A formulação “small” se manteve bem próxima das demais e da referência em todos os estágios da curva. No caso específico de $L/H=2$, a formulação “large” apresentou dificuldades de convergência, o que, de modo geral, não impede a realização da análise.

Analisando a discretização da estrutura, pode-se observar que a estrutura com maior discretização foi aquela que apresentou resultados mais próximos da referência.

Por fim, a análise da presença ou não de termos de ordem elevada no tensor deformação pôde ser percebida, verifica-se, principalmente no caso da estrutura

menos discretizada, que a presença de termos de ordem elevada levou a estrutura a um resultado mais próximo da referência.

5. CONCLUSÃO

Com o intuito de atender o objetivo principal deste estudo, de comparação das soluções de problemas de análise não-linear geométrica de estruturas planas, o presente trabalho apresentou exemplos numéricos de aplicação dos pontos discutidos, que, juntamente com a revisão bibliográfica realizada, permitiram que, ao término deste estudo, importantes conclusões fossem apontadas.

A discretização da estrutura exerce grande influência no comportamento do modelo, sendo avaliada por meio da realização de duas rotinas de testes para cada exemplo, com discretização das barras em 2 e 5 elementos. Pôde-se observar que para a maioria dos exemplos realizados, a estrutura mais discretizada apresentou resposta significativamente mais próxima da referência estabelecida.

A utilização das formulações Lagrangeana ou corrotacional trouxeram, de modo geral, resultados próximos, sendo maneiras efetivas de descrição do problema de não-linearidade geométrica. Observou-se que na zona fundamental da curva de equilíbrio, as curvas apresentaram resultados bastante similares, estando, porém, na maioria dos casos, a corrotacional mais próxima da referência estabelecida. Destaca-se, entretanto, que a curva oriunda da utilização da formulação Lagrangeana se mantém suficientemente próxima da referência e da curva corrotacional, se sobrepondo, em alguns momentos, a esta. À medida que se avança na zona pós-crítica, a formulação corrotacional se destaca pela maior proximidade da referência. Nesta zona, a curva oriunda da formulação Lagrangeana se mantém próxima da referência, todavia, em alguns casos apresentou dificuldades de atingir a convergência nos processos iterativos.

A esbeltez da seção é um fator de grande influência nos resultados obtidos. Para cada rotina de testes, analisou-se o comportamento da estrutura considerando 4 índices de esbeltez diferentes: $L/H=2$, $L/H=4$, $L/H=6$ e $L/H=10$. Notou-se que, tanto para a estrutura mais discretizada, como para a menos, nas seções mais esbeltas, a diferença da utilização das formulações, termos de ordem elevada e outros fatores analisados, não eram tão significativos. Já nas seções menos esbeltas, as diferenças se acentuavam mais e as curvas se distanciavam mais da referência estabelecida, sendo a estrutura também mais sensível as alterações de carregamento.

A utilização de termos de ordem elevada no tensor de deformação de Green-Lagrange pôde ser observada comparando os resultados das curvas “*large*” e “*small*”. A presença destes termos levou a curva de equilíbrio à valores mais próximos da curva de referência, proporcionando uma melhor descrição do comportamento da estrutura dentro dos parâmetros estabelecidos neste estudo.

No que diz respeito ao custo computacional da utilização de cada uma das formulações apresentadas, pôde-se realizar uma análise qualitativa por meio do tempo de processamento e número de iterações realizadas para alcance de um mesmo resultado. A utilização das formulações corrotacional e Lagrangeana sem termos de ordem elevada apresentaram custo computacional de mesma ordem de grandeza, enquanto a formulação Lagrangeana com termos de ordem elevada apresentou tempo e número de iterações consideravelmente maior. Esse comportamento pôde ser observado apenas na fase pós-crítica da curva de equilíbrio, sendo acentuado à medida que se avançava mais nesta zona. Na fase pré-crítica da curva, o custo dos três modelos apresentados se mostrou próximo.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Fundamentado nos estudos realizados, o presente estudo aponta para o desenvolvimento de pesquisas futuras que avaliem comparativamente os parâmetros analisados para estruturas tridimensionais.

No que diz respeito à análise da esbeltez na resposta da estrutura, sugere-se a expansão do estudo para estruturas cujas barras apresentem seções variáveis ou assimétricas.

A comparação do comportamento descrito com o comportamento indicado por programas comerciais, utilizando elementos de pórticos ou casacas, é, também, algo que pode ser explorado. Além disso, a comparação dos resultados com os descritos por métodos simplificados.

A exploração de diferentes estratégias de correção da solução não-linear na descrição do comportamento da estrutura é, um horizonte de expansão do estudo. Por fim, a associação com modelos de análise de não-linearidade física.

6. REFERÊNCIAS

ARGENTA, M. A. **Decomposição polar do gradiente de deformação**. Notas de Aula da Disciplina de Mecânica do Contínuo. Disponível em: <<http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo/decomposicao.html>> Acesso em 22 de Fevereiro de 2022.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 8800 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto**. Rio de Janeiro, 2008.

BATTINI, J. M. **Corotational Beam Elements in Instability Problems**. Ph.D Thesis, Royal Institute of Tecnology. Stockholm, 2002.

BAZANT, Z. P; CEDOLIN, L. **Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories**. World Scientific Publishing Company, 2010.

BORGES, D. G.; MADONA, E. F. **Aplicação do método dos elementos finitos em problemas de vigas considerando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko**. Ilha Solteira, 2005. Disponível em <repositorio.unitau.br/jspui/bitstream/20.500.11874/3431/1/DIEGO%20GONCALVES%20BORGES.pdf> Acesso em 07 outubro de 2021.

CODES, R. A. **Formulações e métodos de solução na análise não-linear de treliças espaciais**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1978.

LEAL, L. A. A. S; CAMPELLO, E. M. B. **Análise dos efeitos da não-linearidade geométrica em pórticos planos de aço**. XXXIV Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia (CILAMCE). Pirenópolis, 2013.

LEE, S.; MANUEL, F. S; ROSSOW, E. C. **“Large deflections and stability of elastic frames.”** J. Engrg. Mech. Div., ASCE, EM2, 521-547. 1962.

MARTHA, L. F. C. R. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro, 2010.

MAXIMIANO, D. P; SILVA, A. R. D; SILVEIRA, R. A. M. **A técnico do fluxo normal aplicado à análise não-linear de arcos esbeltos**. Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2012.

MOTA, F. G. O. **Análise do efeito da não-linearidade física em um elemento de barra de Euler-Bernoulli**. Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2018.

PEREIRA, A. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2002.

RANGEL, R. L. **Educational tool for Structural Analysis of Plane Frame Models with Geometric Nonlinearity**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019

RANGEL, R. L. **Numerical Analysis of Trusses and Frames (NUMA-FT)**. Institute of Technical-Scientific Software Development of PUC-Rio, 2019. Disponível em <<https://mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/79406-numa-ft>> Acesso em 05 de agosto de 2021.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2000.

RODRIGUES, M. A. C. **Soluções integradas para as formulações do problema de não-linearidade geométrica**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ROORDA, J. **The buckling behaviour of imperfect structural systems**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1965.

SANTANA, M. V. B. **Desenvolvimento de Sistema Computacional via MATLAB/GUI (Graphical User Interface) para Análise Geometricamente Não-linear de Estruturas.** Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2015.

SEGUNDO, J. S. R. **Estratégias numéricas para otimização da solução não-linear de problemas estruturais.** Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2019.

SILVA, J. L. **Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não-linear de estruturas reticuladas.** Ouro Preto, 2016. Disponível em <www.propec.ufop.br/uploads/propec_2016/teses/arquivos/dissertacao-jessica-lorrany.pdf> Acesso em 04 outubro de 2021.

SILVA, M. F. D. S. **Ferramenta gráfico-interativa para o dimensionamento de pórticos planos de concreto armado considerando não-linearidade geométrica.** Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2017.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability.** 2.ed. McGraw Hill, Singapura, 1963.

WILLIAMS, F. W.; **An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections.** The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 17, n. 4, 1964.

WHITE, R. N; GERGELY, P; SEXSMITH, R. G. **Engenharia Estrutural.** Editora Wiley, Volume 1, 1976.

YSHII, Y. **Formulação co-rotacional para pórticos planos.** Dissertação (Mestrado) – Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos. 2002.